Teoria miary i całki

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka	**Cykl dydaktyczny** 2023/24
Specjalność Matematyka teoretyczna	**Kod zajęć** 06MATTEOS.18K.03583.23
Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki	**Języki wykładowe** polski
Poziom studiów studia pierwszego stopnia	**Obligatoryjność** Obowiązkowy
Forma studiów studia stacjonarne	**Blok zajęciowy** Przedmioty kierunkowe
Profil studiów profil ogólnoakademicki	

Koordynator zajęć	Mieczysław Mastyło
Prowadzący zajęcia	Mieczysław Mastyło

Okres	**Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia**	**Liczba punktów ECTS**
Semestr 4	• Wykład: 30, Egzamin • Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną	5

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem przedmiotu jest zapoznanie studentów z podstawowymi pojęciami i wynikami z teorii miary i całki. Przedmiotem rozważań są funkcje zbiorów, konstrukcja miary Lebesgue'a i zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a, funkcje mierzalne, całka Lebesgue'a i jej własności. Będą zaprezentowane dowody fundamentalnych twierdzeń wspomnianej teorii, m.in. twierdzenia Lebesgue' a o zdominowanej zbieżności, Fubiniego i Radona-Nikodyma, które odgrywają ważną rolę w różnych działach analizy funkcjonalnej. Wykład stanowi ważną podstawę do innych zaawansowanych kursów z zakresu analizy funkcjonalnej, rachunku prawdopodobieństwa i teorii przestrzeni funkcyjnych.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy – Student/ka:			
W1	Zna podstawowe typy rodzin zbiorów (np. pierścienie i sigma-algebry) i ich własności.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W2	Zna pojęcie sigma-algebry zbiorów borelowskich. Zna i umie dowodzić własności odwzorowań mierzalnych o wartościach w przestrzeniach topologicznych.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W3	Zna podstawowe pojęcia dotyczące funkcji zbioru. Umie dowodzić podstawowe własności miar i potrafi je stosować w rozwiązywaniu standardowych problemów z teorii miary. Zna różne przykłady i metody konstrukcji miar.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W4	Zna definicję miary zewnętrznej, twierdzenie Caratheodory'ego, standardową konstrukcję miar zewnętrznych oraz twierdzenie o rozszerzaniu miar.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W5	Zna konstrukcję miary (zewnętrznej) Lebesgue'a oraz jej podstawowe własności.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W6	Zna pojęcie mierzalności między przestrzeniami mierzalnymi i umie dowodzić podstawowe własności funkcji mierzalnych. Zna podstawowe twierdzenia o ciągach funkcji mierzalnych i potrafi umiejętnie z nich korzystać w rozwiązywaniu problemów.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W7	Rozumie kolejne etapy konstruowania całki względem miary i zna własności całki oraz podstawowe twierdzenia graniczne.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W8	Zna definicję przestrzeni funkcji całkowalnych z p-tą potęgą. Potrafi wykazać normowalność i zupełność tych przestrzeni.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W9	Zna twierdzenie Radona-Nikodyma i wnioski wynikające z tego twierdzenia.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W10	Zna konstrukcję miary produktowej i potrafi stosować twierdzenie Fubiniego.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
Umiejętności – Student/ka:			
U1	Posiada umiejętności przeprowadzania rozumowań matematycznych; dowodzenia twierdzeń, jak i weryfikację hipotez drogą doboru odpowiednich przykładów	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U2	Zna i rozumie rolę, znaczenie i zasady poprawnego prowadzenia rozumowań matematycznych oraz zna różne techniki dowodzenia. Posiada umiejętności przeprowadzania rozumowań matematycznych; dowodzenia twierdzeń, jak i weryfikację hipotez drogą doboru odpowiednich przykładów.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U3	Potrafi podać liczne przykłady miar zewnętrznych i opisać rodzinę zbiorów mierzalnych w sensie Caratheodory'ego generowanych przez te miary.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U4	Potrafi stosować miarę i całkę Lebesgue'a w zagadnieniach teoretycznych i praktycznych w szczególności w analizie i probabilistyce.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U5	Potrafi zweryfikować własności funkcji, wyznaczyć jej charakterystyki, ustalić rodzaj zbieżności ciągów funkcyjnych oraz właściwie klasyfikować rodziny funkcji pod kątem ich zastosowań.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
Kompetencji społecznych – Student/ka:			
K1	Jest gotów/gotowa do samodzielnego studiowania zaawansowanych pojęć z teorii miary i całki.	MAT_K1_K01, MAT_K1_K02, MAT_K1_K03, MAT_K1_K04, MAT_K1_K06	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Zamkniętość rodzin zbiorów na różne operacje mnogościowe. Podstawowe typy rodzin zbiorów (pierścienie, sigma-algebry) i ich własności.	W1, W2, U1, K1	Wykład, Ćwiczenia
2.	Przestrzenie mierzalne. Sigma-algebry generowane przez rodziny zbiorów. Charakteryzacje pewnych typów sigma-algebr. Odwzorowania mierzalne.	W1, W2, U1, K1	Wykład, Ćwiczenia
3.	Zbiory borelowskie i mierzalność odwzorowań o wartościach w przestrzeniach topologicznych. Przykłady odwzorowań mierzalnych.	W2, U1, K1	Wykład, Ćwiczenia
4.	Ciągi odwzorowań funkcji mierzalnych. Funkcje mierzalne jako punktowe granice ciągów funkcji prostych. Klasyczne operacje na ciągach funkcji mierzalnych i ich własności.	W5, W6, U1, U5, K1	Wykład, Ćwiczenia
5.	Funkcje zbioru. Miary skończenie i przeliczalnie addytywne i ich własności.	W3, U3, K1	Wykład, Ćwiczenia
6.	Miary zewnętrzne, twierdzenie Caratheodory'ego, standardowa konstrukcja miar zewnętrznych, twierdzenie o rozszerzaniu miar.	W4, W5, U1, U3, K1	Wykład, Ćwiczenia
7.	Konstrukcja miary Lebesgue'a i jej podstawowe własności. Istnienie zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a.	W5, U1, K1	Wykład, Ćwiczenia
8.	Całka Lebesgue'a funkcji mierzalnej, względem miary i jej własności. Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i zbieżności zmajoryzowanej i ich zastosowania.	W7, U4, K1	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
9.	Normowalnosć i zupełność przestrzeni funkcji mierzalnych całkowalnych z p-tą potęgą.	W8, U4, K1	Wykład, Ćwiczenia
10.	Twierdzenia Radona-Nikodyma i wnioski wynikające z tego twierdzenia.	W9, U1, U2, K1	Wykład, Ćwiczenia
11.	Produkty miar. Twierdzenia Tonelliego i Fubiniego.	W10, K1	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień, Wykład konwersatoryjny, Dyskusja
Ćwiczenia	Rozwiązywanie zadań (np.: obliczeniowych, artystycznych, praktycznych), Metoda ćwiczeniowa

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Zdanie egzaminu pisemnego. Skala ocen jest następująca: • bardzo dobry (bdb; 5,0) - powyżej 90% punktów • dobry plus (+db; 4,5) - powyżej 80% punktów • dobry (db;) - powyżej 70% punktów • dostateczny plus (+dst; 3,5) - powyżej 60% punktów • dostateczny (dst; 3,0) - powyżej 50% puntków • niedostateczny (ndst; 2,0) - 50% puntów lub mniej
Ćwiczenia	Uzyskanie co najmniej 50% możliwych punktów. Skala ocen jest następująca: • bardzo dobry (bdb; 5,0) - powyżej 90% punktów • dobry plus (+db; 4,5) - powyżej 80% punktów • dobry (db; 4,0) - powyżej 70% punktów • dostateczny plus (+dst; 3,5) - powyżej 60% punktów • niedostateczny (ndst; 2,0) - 50% punktów lub mniej

Literatura

Obowiązkowa

1. A. Birkholc, Analiza matematyczna, Funkcje wielu zmiennych, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2002.
2. F. M. Filipczak, Teoria miary i całki, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódz 1997.

Dodatkowa

1. P. Halmos, Measure Theory, D. van Nostrand Co., New York 1950.
2. M. Jaroszewska i J. Musielak, Analiza matematyczna, t. 2, cz. 2 i 3, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2002.
3. S. Łojasiewicz, Wstep do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, Warszawa 1973.
4. J. Niewiarowski, Zadania z teorii miary, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódz 1999.
5. W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.
6. R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste, T. 1, Monografie Matematyczne t. 35, PWN, Warszawa 1958.
7. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, cześć II, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 1996.
8. Ch. Swartz, Measure, integration and function spaces, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	**Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć**
Wykład	30
Ćwiczenia	30
Czytanie wskazanej literatury	25
Przygotowanie do zajęć	25
Przygotowanie do egzaminu	15
Przygotowanie do zaliczenia	15
Łączny nakład pracy studenta	**Liczba godzin** 140
Liczba punktów ECTS	**ECTS** 5

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K1_K01	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do uznania ograniczenia własnej wiedzy i zrozumienia potrzeby dalszego kształcenia
MAT_K1_K02	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do precyzyjnego formułowania pytań służących pogłębieniu zrozumienia danego zagadnienia
MAT_K1_K03	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do wyjaśniania znaczenia matematyki i jej osiągnięć
MAT_K1_K04	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do samodzielnego wyszukiwać informacje w literaturze i bazach danych
MAT_K1_K06	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do samodzielnego formułowania opinii i przyjmowania postawy krytycznej w zagadnieniach, w których znaczącą rolę odgrywa matematyka lub używa się języka matematyki
MAT_K1_U01	Absolwent/ka potrafi przedstawiać treści matematyczne w mowie i w piśmie, formułować twierdzenia i definicje
MAT_K1_U02	Absolwent/ka potrafi objaśniać, interpretować złożone wypowiedzi z użyciem matematycznej notacji i języka oraz formułować problemy w postaci symbolicznej, ułatwiającej ich analizę i rozwiązanie
MAT_K1_U03	Absolwent/ka potrafi konstruować logiczną argumentację z klarowną identyfikacją założeń i konkluzji oraz wykazać się biegłością w zakresie różnych metod prowadzenia dowodu matematycznego
MAT_K1_U04	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem logiki matematycznej, teorii mnogości z uwzględnieniem algebry zbiorów, rachunku kwantyfikatorów, relacji porządkujących i relacji równoważności w poznanych działach matematyki oraz w innych dziedzinach wiedzy
MAT_K1_U08	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem teorii funkcji rzeczywistych jednej i wielu zmiennych oraz funkcji zmiennej zespolonej z uwzględnieniem rachunku granic, pochodnych i całek, a także stosować je w poznanych działach matematyki oraz w innych dziedzinach wiedzy
MAT_K1_W02	Absolwent/ka zna i rozumie rolę i znaczenie dowodu w matematyce, a także istotność założeń
MAT_K1_W03	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły, twierdzenia i algorytmy z działów matematyki objętych programem studiów
MAT_K1_W04	Absolwent/ka zna i rozumie teorie matematyczne w zakresie wystarczającym do poprawnego stosowania formalizmu matematycznego w tworzeniu i analizie prostych modeli matematycznych w różnych działach matematyki i innych dziedzinach wiedzy
MAT_K1_W05	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia i metody logiki matematycznej oraz teorii mnogości, a także podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia analizy matematycznej, w tym rachunku różniczkowego i całkowego funkcji rzeczywistych jednej i wielu zmiennych, algebry liniowej i abstrakcyjnej, geometrii i topologii oraz matematyki dyskretnej