

Analiza matematyczna 2

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka Specjalność - Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki Poziom studiów studia pierwszego stopnia Forma studiów studia niestacjonarne Profil studiów profil ogólnoakademicki		Cykl dydaktyczny 2024/25 Kod zajęć 06MATN.12K.00226.24 Języki wykładowe polski Obligatoryjność Obowiązkowy Blok zajęciowy Przedmioty kierunkowe
Koordynator zajęć	Adam Przystacki, Leszek Skrzypczak	
Prowadzący zajęcia	Adam Przystacki, Leszek Skrzypczak	
Okres Semestr 2	Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia - Wykład: 30, Egzamin; w tym zajęcia zdalne: - Wykład synchroniczny: 30 - Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną	Liczba punktów ECTS 10

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem przedmiotu Analiza matematyczna 2 jest przedstawienie rachunku całkowitego funkcji jednej zmiennej oraz zagadnień związanych z ciągami i szeregami funkcyjnymi, w tym szeregami potęgowymi i Fouriera, a także prezentacja wybranych elementów teorii przestrzeni metrycznych.

Wymagania wstępne

Ukończony kurs Analizy Matematycznej 1.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy - Student/ka:			
W1	Zna pojęcie funkcji pierwotnej, całki nieoznaczonej oraz całki oznaczonej. Zna ich własności i relacje zachodzące pomiędzy nimi. Zna i rozumie twierdzenia o całkowaniu przez części i o zamianie zmiennej w całce. Rozumie znaczenie twierdzeń o wartości średniej w rachunku całkowym.	MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W2	Zna definicję całki Riemanna oraz jej podstawowe własności. Rozumie kryterium całkowalności i jego znaczenie w dowodzeniu istnienia całek z funkcji ciągłych i monotonicznych. Zna wzór Newtona-Leibniza. Rozumie interpretację geometryczną całki. Zna zastosowania całki Riemanna, w tym wzory na długość krzywej regularnej, na pole powierzchni i objętość bryły obrotowej.	MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W3	Zna definicje całki niewłaściwej oraz kryteria do badania zbieżności do tych całek. Rozumie analogie pomiędzy teoriami całek niewłaściwych i szeregów liczbowych. Zna funkcję Gamma Eulera.	MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W4	Rozumie zbieżność ciągów i szeregów o wyrazach zespolonych. Zna pojęcie ciągłości i różniczkowalności w kontekście funkcji zmiennej zespolonej. Rozumie analogie z definicjami ciągłości i różniczkowalnością funkcji zmiennej rzeczywistej.	MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W5	Zna pojęcia zbieżności punktowej i jednostajnej ciągów i szeregów funkcyjnych oraz kryteria zbieżności jednostajnej Cauchy'ego i Weierstrassa. Zna związki zbieżności jednostajnej z ciągłością, różniczkowaniem i całkowaniem. Jest świadomy, że istnieją funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne.	MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W6	Zna definicje szeregu potęgowego i promienia zbieżności oraz wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Zna własności sumy szeregu potęgowego w przedziale zbieżności i rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Zna związki pomiędzy funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi.	MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W7	Zna definicję i podstawowe własności szeregu Fouriera. Zna postać trygonometryczną i zespoloną tych szeregów.	MAT_K1_W03, MAT_K1_W06	Egzamin pisemny

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
W8	Zna definicję przestrzeni metrycznej i przykłady tych przestrzeni. Rozumie własności zbiorów otwartych i domkniętych, spójnych i zwartych. Zna pojęcia domknięcia, wnętrza i brzegu zbioru. Zna definicję ciągu zbieżnego, warunku Cauchy'ego i przestrzeni zupełnej. Wie, że przestrzeń euklidesowa skończenie wymiarowa jest zupełna. Zna twierdzenie Banacha o kontrakcji. Zna definicję funkcji ciągłej w przypadku funkcji określonej na przestrzeni metrycznej oraz jej własności na zbiorach zwartych i spójnych. Widzi różnicę pomiędzy spójnością a łukową spójnością.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny
W9	Zna definicję i podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa.	MAT_K1_W06	Egzamin pisemny
Umiejętności - Student/ka:			
U1	Potrafi obliczać funkcje pierwotne dla funkcji wymiernych oraz niektórych funkcji niewymiernych i funkcji trygonometrycznych. Umie stosować twierdzenia o całkowaniu przez części i o zamianie zmiennej w całce.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U2	Potrafi podać przykłady funkcji całkowalnych i niecałkowalnych w sensie Riemanna. Potrafi wyznaczyć całkę górną, dolną i całkę Riemanna prostych funkcji. Potrafi zastosować wzory na pole powierzchni, długość łuku i objętość bryły obrotowej.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U3	Potrafi stosować kryteria zbieżności całek niewłaściwych do badania zbieżności tych całek. Potrafi stosować całkowite kryterium zbieżności szeregów.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U4	Potrafi dokonywać obliczeń w ciele liczb zespolonych. Umie zbadać ciągłość i różniczkowalność prostych funkcji zmiennej zespolonej.	MAT_K1_U06, MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U5	Potrafi sprawdzić czy proste ciągi funkcyjne są zbieżne i czy jest to zbieżność punktowa czy jednostajna. Umie badać zbieżność jednostajną za pomocą kryteriów Weierstrassa i Cauchy'ego.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U6	Potrafi rozwijać funkcje w szereg potęgowy i stosować twierdzenie Abela.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U7	Potrafi rozwijać funkcje w szereg Fouriera i badać zbieżność szeregu.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U8	Potrafi określić czy podzbiór przestrzeni euklidesowej jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny. Umie znaleźć granice ciągów w wybranych przestrzeniach metrycznych. Potrafi stosować twierdzenie Banacha o kontrakcji do rozwiązywania prostych równań nieliniowych.	MAT_K1_U04, MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U9	Umie obliczać całki Riemanna-Stieltjesa.	MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	1. Definicja funkcji pierwotnej. 2. Podstawowe własności całki nieoznaczonej. 3. Całkowanie przez części i przez podstawienie. 4. Najważniejszych typów całek nieoznaczonych dających się obliczyć w sposób elementarny: całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych, podstawienia Eulera, całkowanie funkcji trygonometrycznych. 5. Definicja całki oznaczonej i jej podstawowe własności 6. Twierdzenia o wartości średniej dla całek oznaczonych.	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
2.	1. Definiowanie całki Riemanna oraz całek górnej i dolnej 2. Kryterium całkowalności Cauchy'ego 3. Podstawowych własności całki: liniowość, monotoniczność, całka z iloczynu funkcji, całka z bezwzględnej wartości funkcji całkowalnej. 4. Całkowalności funkcji ciągłej i funkcji monotonicznej. 5. Twierdzenia o całce jako funkcji górnej granicy całkowania oraz wzoru Newtona-Leibniza. Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej z funkcji ciągłej. 6. Miara Jordana na płaszczyźnie i interpretacja geometryczna całki. 7. Zastosowania całki Riemanna (długość krzywej, objętość i pole powierzchni bryły obrotowej).	W2, U2	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
3.	1. Definicji różnych całek niewłaściwych i ich podstawowych własności. 2. Kryteria na zbieżność i bezwzględność całek niewłaściwych 3. Związek pomiędzy zbieżnością całki niewłaściwej a zbieżnością szeregu.	W3, U3	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
4.	1. Moduł liczby zespolonej i odległość w ciebie liczb zespolonych. 2. Zbieżność ciągów i szeregów o wyrazach zespolonych, 3. Ciągłość funkcji zespolonych, 4. Definicja pochodnej zespolonej i jej podstawowe własności. 5. Całkowanie funkcji określonych na przedziale i przyjmujących wartości zespolone.	W4, U4	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
5.	1. Definicja zbieżności punktowej i jednostajnej ciągów i szeregów funkcyjnych. 2. Warunk Cauchy'ego na zbieżność jednostajną i kryterium Weierstrassa. 3. Twierdzenia o związkach zbieżności jednostajnej z ciągłością, różniczkowaniem i całkowaniem. 4. Przykład funkcji ciągłej na całej prostej, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie.	W4, W5, U5	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
6.	1. Definicja szeregu potęgowego i jego promienia zbieżności. 2. Twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda. 3. Własności sumy szeregu potęgowego w przedziale zbieżności. 4. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy; rozwinięcia funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych, szereg dwumienny. 5. Przykłady funkcji mającej pochodne dowolnego rzędu, która nie jest analityczna. 6. Twierdzenia Abela o zachowaniu się sumy szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności. 7. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych. Związek pomiędzy funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi, wzory Eulera.	W6, U6	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
7.	1. Definicja szeregu Fouriera. Wzory Eulera-Fouriera. 2. Lemat Riemanna-Lebesgue'a. 3. Całki Dirichleta i zasada lokalizacji. 4. Zbieżności jednostajna i punktowa szeregu Fouriera. 5. Zamkniętości układu trygonometrycznego; nierówność Bessela i identyczność Parsevala.	W7, U7	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
8.	1. Definicja i przykładów przestrzeni metrycznych. 2. Zbiory otwarte i domknięte, domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru. 3. Zbieżności ciągów w przestrzeniach metrycznych: zbieżność w przestrzeniach euklidesowych skończenie wymiarowych, przestrzenie zupełne, 4. Twierdzenie Banacha o kontrakcji. 5. Zbiory zwarte i spójne oraz ich własności. 6. Definicji granicy funkcji i ciągłości funkcji określonych na przestrzeniach metrycznych. Ciągłość funkcji złożonej i funkcji odwrotnej. 7. Własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych i na zbiorach spójnych. 8. Łukowa spójności i jej związek ze spójnością. Łukowa spójność obszarów w przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej.	W8, U8	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
9.	1. Definicja całki Riemanna-Stieltjesa. 2. Całkowanie funkcji ciągłej względem funkcji monotonicznej. 3. Metody obliczania całek Riemanna-Stieltjesa.	W9, U9	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład problemowy
Ćwiczenia	Metoda ćwiczeniowa

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Egzamin pisemny zawierający pytania otwarte i zamknięte. Warunkiem przystąpienia do egzaminu jest posiadanie zaliczenia z ćwiczeń. Skala ocen jest następująca: bardzo dobry (bdb; 5,0) - powyżej 90% punktów dobry plus (+db; 4,5) - powyżej 80% punktów dobry (db; 4,0) - powyżej 70% punktów dostateczny plus (+dst; 3,5) - powyżej 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) - powyżej 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) - 50% punktów lub mniej
Ćwiczenia	Zaliczenie na podstawie kolokwium pisemnych. Skala ocen jest następująca: bardzo dobry (bdb; 5,0) - powyżej 90% punktów dobry plus (+db; 4,5) - powyżej 80% punktów dobry (db; 4,0) - powyżej 70% punktów dostateczny plus (+dst; 3,5) - powyżej 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) - powyżej 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) - 50% punktów lub mniej

Literatura

Obowiązkowa

1. W. Rudin, Podstawy analizy matematycznej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
2. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Części I i II, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2009 (cz. I), 2004 (cz. II).
3. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, t. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.

Dodatkowa

1. H. i J. Musielakowie, Analiza matematyczna, t. I, cz. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004 (t. I, cz. 1), 2002 (t. I, cz. 2).
2. K. Kuratowski, Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
3. G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, t. 1, 2 i 3 Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
4. J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT, Warszawa 2006.
5. W. J. Kaczor, M. T. Nowak, Zadania z analizy matematycznej, t. 2 i 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005 (t. 2) i 2006 (t. 3).
6. B.P. Demidowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2020.

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	30
Ćwiczenia	30
Przygotowanie do zajęć	60
Czytanie wskazanej literatury	70
Przygotowanie do egzaminu	60
Przygotowanie do zaliczenia	50

Łączny nakład pracy studenta	Liczba godzin 300
Liczba punktów ECTS	ECTS 10

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K1_U04	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem logiki matematycznej, teorii mnogości z uwzględnieniem algebry zbiorów, rachunku kwantyfikatorów, relacji porządkujących i relacji równoważności w poznanych działach matematyki oraz w innych dziedzinach wiedzy
MAT_K1_U06	Absolwent/ka potrafi operować pojęciem liczby, zwłaszcza rzeczywistej i zespolonej, arytmetyką liczb całkowitych oraz rozwiązywać podstawowe typy równań algebraicznych w różnych zbiorach liczb
MAT_K1_U08	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem teorii funkcji rzeczywistych jednej i wielu zmiennych oraz funkcji zmiennej zespolonej z uwzględnieniem rachunku granic, pochodnych i całek, a także stosować je w poznanych działach matematyki oraz w innych dziedzinach wiedzy
MAT_K1_W02	Absolwent/ka zna i rozumie rolę i znaczenie dowodu w matematyce, a także istotność założeń
MAT_K1_W03	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły, twierdzenia i algorytmy z działów matematyki objętych programem studiów
MAT_K1_W05	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia i metody logiki matematycznej oraz teorii mnogości, a także podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia analizy matematycznej, w tym rachunku różniczkowego i całkowego funkcji rzeczywistych jednej i wielu zmiennych, algebry liniowej i abstrakcyjnej, geometrii i topologii oraz matematyki dyskretnej
MAT_K1_W06	Absolwent/ka zna i rozumie podstawy technik numerycznych, obliczeniowych oraz programowania, wspomagających pracę matematyka, a także zna co najmniej jeden pakiet oprogramowania użytkowego