UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

Analiza matematyczna: funkcje wielu zmiennych

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka	**Cykl dydaktyczny** 2025/26
Specjalność -	**Kod zajęć** 06MATS.14.16779.25
Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki	**Języki wykładowe** polski
Poziom studiów studia pierwszego stopnia	**Obligatoryjność** Obowiązkowy
Forma studiów studia stacjonarne	**Blok zajęciowy** Przedmioty podstawowe
Profil studiów profil ogólnoakademicki	

Koordynator zajęć	Tomasz Kubiak
Prowadzący zajęcia	Tomasz Kubiak

Okres	**Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia**	**Liczba punktów ECTS**
Semestr 3	• Wykład: 60, Egzamin • Ćwiczenia: 60, Zaliczenie z oceną	10

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Nauczenie się rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych.

Wymagania wstępne

Pozytywne oceny z porzedmiotów: Wstęp do analizy matematycznej, Analiza matematczna: rachunek różniczkowy i całkowy, Algebra liniowa.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy – Student/ka:			
W1	Zna zależności pomiędzy funkcjami liniowymi z R^n do R^{m} a ich macierzami. Wie, że macierz złożenia funkcji liniowych jest iloczynem macierzy tych funkcji. Zna odległość euklidesową w R^n i rozumie, że jest ona naturalnym uogólnieniem przypadków n = 1,2,3. Wie, że zbiory ograniczone, zbiory otwarte, zbiory domknięte i zbiory zwarte, poznane na prostej w semestrze 1, mają swoje odpowiedniki w R^n. I mają analogiczne własności i charakteryzacje. To samo dotyczy zbieżności ciągów, ciągłości funkcji i granic funkcji. Rozumie, że znajomość przypadku n = 1 jest konieczna do przypadków n>1. Czyli rozumie, że analizy w R^1 nie można nauczyć się na analizie w R^n podstawiając sobie n =1. Wie, że analiza w R^n to do pewnego stopnia analiza w R^1 "po współrzędnych".	MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W2	Zna podstawowe pojęcia i twierdzenia, w tym: pochodna, pochodne cząstkowe, rola pochodnych cząstkowych we wzorze na pochodną i macierz tej pochodnej, reguły łańcuchowe i twierdzenie Schwarza, pochodne cząstkowe wyższych rzędów, różniczka rzędu drugiego i jej macierz Hessego.	MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W3	Rozumie pojęcia związane z całką Riemanna. Dlatego rozumie trudności w porównaniu z przypadkiem n = 1. Wtedy trudność całki zależała wyłącznie od rodzaju funkcji określonej na odcinku [a,b]. Teraz całka z funkcji stałej może być trudna, jeśli dziedzina będzie trudna. To wszystko rozumie.	MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W4	Zna pojęcia całki krzywoliniowej i powierzchniowej i związane z nimi słynne twierdzenia (wymienione w programie wykładu na str. 5 tego sylabusa).	MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
Umiejętności – Student/ka:			
U1	Umie napisać macierz funkcji liniowej mając wzór funkcji i na odwrót.	MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U2	Umie obliczać pochodne cząstkowe, także za pomocą definicji. Umie znaleźć równanie płaszczyzny stycznej. Umie stosować reguły łańcuchowe, w szczególności umie obliczać zwykłe pochodne funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej o wzorze postaci $\phi(x)=g(f_1(x),...,f_{n}(x))$, gdziey f_{i} jest jednej zmiennej, a g jest funkcją n zmiennych. Oblicza pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Umie napisać macierz Hessego funkcji n zmiennych i wzór różniczki drugiego rzędu. Za pomocą tych różniczek ustali rodzaj ekstremum funkcji. Umie obliczyć ekstrema warunkowe.	MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U3	Umie obliczać całki na zbiorach normalnych w R^2 i w R^3 za pomocą całek iterowanych, zwłaszcza na prostokątach i prostopadłościanach oraz z użyciem twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie. Umie stosować takie podstawienia dla wybranych dziedzin i wybranych funkcji na tych dziedzinach.	MAT_K1_U04, MAT_K1_U05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U4	Potrafi obliczać niektóre całki krzywoliniowe i powierzchniowe.	MAT_K1_U04, MAT_K1_U05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Struktura liniowo-metryczna w R^n • Postać funkcji liniowej z R^n do R^{m} i jej macierz • Izomorfizm przestrzeni funkcji liniowych i przestrzeni ich macierzy • Składanie funkcji liniowych to mnożenie ich macierzy • Nierówność Cauchy'efo–Schwarza • Odległość euklidesowa i norma euklidesowa • Zbiory otwarte w R^n • Zbieżność w R^n jest zbieżnością po współrzędnych • Zbiory domknięte w w R^n • Ciagłość funkcji jest ciągłością po składowych • Funkcje liniowe są ciągłe • Punkt skupienia podzbioru w R^n • Granica funkcji jest granicą po składowych	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia
2.	Rachunek różniczkowy w R^n • Pochodna funkcji ze zbioru $A \subseteq R^n$ do R^{m} • Część liniowa i reszta • Jedyność pochodnej • Różniczkowalność jest różniczkowalnością po składowych • Funkcji różniczkowalne jest ciągła • Pochodne cząstkowe • Funkcja różniczkowalna ma pochodne cząstkowe • Ciągłe pochodne cząstkowe implikują różniczkowalność • Macierz Jacobiego i jakobian • Interpretacja geometryczna pochodnej w R^2 • Pochodna złożenia i reguły łańcuchowe • Twierdzenia o wartości średniej • Pochodne cząstkowe wyższych rzędów • Twierdzenie Schwarza • Druga pochodna i macierz Hessego • Różniczki wyższych rzędów • Wzory Taylora i Maclaurina • Warunek konieczny ekstremum funkcji różniczkowalnej • Warunek dostateczny ekstremum funkcji klasy C^2 • Twierdzenie o funkcjach uwikłanych • Dyfeomorfizm • Pochodna funkcji odwrotnej • Powierzchnia gładka • Przestrzeń styczna • Ekstrema warunkowe (bez dowodów)	W1, W2, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
3.	Rachunek całkowy w R^n • Przedział n-wymiarowy i jego zwartość • Sumy Darboux • Całka Riemanna na przedziale n-wymiarowym • Własności sum Darboux • Warunek konieczny i dostateczny całkowalności • Algebraiuczne włąsności całki • Porządkowe własności całki • Całkowalność funkcji ciągłych • Zbiory o mierze zero • Zbiory o objętości zero • Wahanie funkcji • Twierdznie Lebesgue'a o całkowalności • Całki iterowane • Twierdzenie Fubiniego o całkach iterowanych • Brzeg i domknięcie zbioru • Zbiór mierzalny w sensie Jordana • Addytywnośc całki względem zbioru • Zbiory normalne w R^2 i w R^3 • Całkowanie na zbiorach normalnych • Dyfeomorfizmy: współrzędne biegunowe, walcowe, sferyczne • Całkowanie przez podstawienie (bez dowodu) • Całki niewłaściwe funkcji wielu zmiennych • Całka Poissona • Funkcje jednej zmiennej definiowane całką funkcji dwóch zmiennych (tzw. całki zależne od parametru) • Ciągłość i różniczkowalność takich funkcji • Całki niewłaściwe zależne od parametru • Funkcje gamma i beta Eulera	W3, W4, U1, U2, U3	Wykład, Ćwiczenia
4.	Całki krzywoliniowe i powierzchniowe • Całka krzywoliniowa niezorientowana • Całka krzywoliniowa zorientowana • Twierdzenie Greena • Niezależność całki krzywoliniowej od drogi • Zastosowanie tw. Greena do obliczania pól • Całka powierzchniowa zorientowana • Twierdzenie Stoksa (bez dowodu) • Twierdzenie Ostrogradskiego-Gausa (bez dowodu)	W4, U4	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład problemowy
Ćwiczenia	Praca z tekstem

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Zdanie egzaminu pisemnego. Skala ocen: • 3 [51–60 %], • 3+ [61–70 %], • 4 [71–80 %], • 4+ [81–90 %], • 5 [91–100 %].
Ćwiczenia	Zaliczenie dwóch sprawdzianów pisemnych. Skala ocen: • 3 [51–60 %], • 3+ [61–70 %], • 4 [71–80 %], • 4+ [81–90 %], • 5 [91–100 %].

Literatura

Obowiązkowa

1. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część II, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2004.
2. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część III, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2000.
3. R. Rudnicki, Wykłady z analizy matematycznej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Dodatkowa

1. M. Spivak, Analiza na rozmaitościach, PWN, Warszawa 1977.
2. J. Musielak, L. Skrzypczak, Analiza matematyczna, Tom 3, cz. 1, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2006.
3. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, Część II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	60
Ćwiczenia	60
Przygotowanie do zajęć	50
Przygotowanie do egzaminu	50
Przygotowanie do zaliczenia	50

Łączny nakład pracy studenta	**Liczba godzin** 270
Liczba punktów ECTS	**ECTS** 10

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K1_U03	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem analizy matematycznej oraz stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U04	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem algebry liniowej oraz abstrakcyjnej i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U05	Absolwent/ka potrafi posługiwać się pojęciami i twierdzeniami geometrii i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_W04	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia analizy matematycznej oraz podstawy teorii równań różniczkowych
MAT_K1_W05	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia algebry abstrakcyjnej i liniowej oraz geometrii