



UNIwersytet  
IM. ADAMA MICKIEWICZA  
W POZNANIU

## Analiza matematyczna: rachunek różniczkowy i całkowy

### Sylabus zajęć

#### Informacje podstawowe

|                                                                    |                                                                                                                                                                         |                                                |                                  |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------|
| <b>Kierunek studiów</b><br>Matematyka                              |                                                                                                                                                                         | <b>Cykl dydaktyczny</b><br>2025/26             |                                  |
| <b>Specjalność</b><br>-                                            |                                                                                                                                                                         | <b>Kod zajęć</b><br>06MATS.12P.16777.25        |                                  |
| <b>Jednostka organizacyjna</b><br>Wydział Matematyki i Informatyki |                                                                                                                                                                         | <b>Języki wykładowe</b><br>polski              |                                  |
| <b>Poziom studiów</b><br>studia pierwszego stopnia                 |                                                                                                                                                                         | <b>Obligatoryjność</b><br>Obowiązkowy          |                                  |
| <b>Forma studiów</b><br>studia stacjonarne                         |                                                                                                                                                                         | <b>Blok zajęciowy</b><br>Przedmioty podstawowe |                                  |
| <b>Profil studiów</b><br>profil ogólnoakademicki                   |                                                                                                                                                                         |                                                |                                  |
| <b>Koordynator zajęć</b>                                           | Tomasz Kubiak                                                                                                                                                           |                                                |                                  |
| <b>Prowadzący zajęcia</b>                                          |                                                                                                                                                                         |                                                |                                  |
| <b>Okres</b><br>Semestr 2                                          | <b>Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Wykład: 60, Egzamin</li><li>• Ćwiczenia: 60, Zaliczenie z oceną</li></ul> |                                                | <b>Liczba punktów ECTS</b><br>10 |

#### Cele kształcenia dla zajęć

| Kod | Cel                                                                                                 |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| C1  | Naszym celem jest porządnie nauczyć się rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej. |

#### Wymagania wstępne

Ocena pozytywna z przedmiotu: Wstęp do analizy matematycznej.

## Efekty uczenia się dla zajęć

| Kod                               | Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Efekty uczenia się dla kierunku          | Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <b>Wiedzy - Student/ka:</b>       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                          |                                                              |
| W1                                | Wie, że pochodna jest granicą ilorazu różnicowego i że granice takich ilorazów obliczane były już w semestrze pierwszym. Zna reguły różniczkowania. Rozumie, że różniczkowalność jest własnością silniejszą niż ciągłość. Zna pojęcie funkcji pochodnej i wie, że ta funkcja ma zawsze własność Darboux, mimo że nie musi być ciągła. Rozumie znaczenie twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, bo wie, że nie dotyczy ono jedynie funkcji na odcinku, ale też funkcji, którą można obciąć do odcinka. Czyli rozumie fundamentalność twierdzenia Lagrange'a, dzięki któremu może badać tzw. przebieg zmienności funkcji. Zna pochodne wyższych rzędów. Zna wzór Taylora (zwłaszcza z resztą Lagrange'a) i rozumie, że wzór Taylora rzędu 1 to twierdzenie Lagrange'a. Sprawdza istnienie ekstremum za pomocą pochodnych wyższego rzędu. | MAT_K1_W03,<br>MAT_K1_W05                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W2                                | Wie, że całka Riemanna jest potężnym narzędziem. I wie, że nie służy tylko do obliczania długości, pól i objętości rozmaitych tworów geometrycznych. Całka Riemanna wprowadza też nowy sposób definiowania funkcji o wzorze $F(x)$ za pomocą całki z funkcji $f$ na odcinku $[a,x]$ . Dlatego rozumie, dlaczego twierdzenie mówiące o tym własnościach nazwano zasadniczym twierdzeniem rachunku całkowego.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | MAT_K1_W03,<br>MAT_K1_W04,<br>MAT_K1_W05 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W3                                | Wie, że ciągi sum, np. $1+1/(1!) + \dots + 1/(n!)$ , były już w semestrze pierwszym. Teraz otrzymały nową nazwę: są sumami częściowymi szeregów. Zna rozmaite kryteria zbieżności takich sum, czyli zbieżności szeregów. W typowych przypadkach rozpoznaje, którego kryterium należy użyć.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | MAT_K1_W03,<br>MAT_K1_W04                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W4                                | Dzięki ciągom i szeregom funkcyjnym dowiaduje się, jak pojęcia analizy matematycznej ewoluują. Dowiaduje się, że nie tylko ciąg liczb może być zbieżny do liczby, ale że ciąg funkcji też może być zbieżny do funkcji. Może zada sobie pytanie co jeszcze może być zbieżne i do czego? Dowie się, że znowu pojawiła się odległość. Nie odległość punktów na prostej lub płaszczyźnie, ale odległość jednej funkcji od drugiej. Może zada sobie pytanie pomiędzy jakimi innymi jeszcze obiektami można by określić odległość?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | MAT_K1_W03,<br>MAT_K1_W04,<br>MAT_K1_W05 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W5                                | Wie, że wielomiany są najbardziej naturalnymi funkcjami. Teraz dowie się, że inne porządne funkcje, które wielomianami nie są, mogą być jednak zapisane w postaci "nieskończenie długiego wielomianu", czyli szeregu potęgowego.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | MAT_K1_W03,<br>MAT_K1_W04,<br>MAT_K1_W05 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| <b>Umiejętności - Student/ka:</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                          |                                                              |

| Kod | Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Efekty uczenia się dla kierunku | Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| U1  | Bezbłędnie oblicza pochodne funkcji elementarnych i rozumie, że to jest konieczne. Dla stosownie dobranych wzorów $f(x)$ umie pochodną $f'(x)$ doprowadzić do postaci, która pozwoli na rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ i nierówności $f'(x) > 0$ . Wie, co trzeba zrobić, by pokazać, że jakaś funkcja nie ma pochodnej w jakimś punkcie. Za pomocą pochodnych umie badać monotoniczność i znajdować ekstrema stosownie dobranych funkcji. Za pomocą twierdzenia Lagrange'a umie dowodzić pewnych nierówności, a także sprawdzać, czy niektóre funkcje są funkcjami Lipschitza. Umie napisać wzór Maclaurina niskiego rzędu dla dowolnej funkcji elementarnej na odcinku $[0, x]$ . | MAT_K1_U03,<br>MAT_K1_U04       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U2  | Umie znajdować funkcje pierwotne typowych funkcji. Jeśli zna całkę nieoznaczoną z $f(x)$ , to całkę z $f(ax+b)$ musi umieć zapisać bez żadnego podstawiania. To samo dotyczy całki nieoznaczonej z ilorazu $f'(x)/f(x)$ . Umie stosować wzór Newtona-Leibniza. Umie stosować rachunek całkowy w geometrii w stosownym dla drugiego semestru zakresie. Za pomocą poznanych rozwinięć funkcji w szereg potęgowe umie rozwijać inne funkcje w szereg potęgowy. Umie obliczać wartości niektórych całek niewłaściwych.                                                                                                                                                                    | MAT_K1_U03,<br>MAT_K1_U04       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |

### Treści programowe dla zajęć

| Lp. | Treści programowe dla zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Efekty uczenia się dla zajęć | Formy zajęć       |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 1.  | <b>Różniczkowanie</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pochodna funkcji w punkcie</li> <li>• Różniczkowalność implikuje ciągłość</li> <li>• Liniowość różniczkowania</li> <li>• Pochodna funkcji złożonej</li> <li>• Pochodna funkcji odwrotnej</li> <li>• Pochodne funkcji elementarnych</li> <li>• Twierdzenie Rolle'a</li> <li>• Twierdzenie Lagrange'a</li> <li>• Twierdzenie Cauchy'ego</li> <li>• Monotoniczność funkcji różniczkowalnych</li> <li>• Warunek Lipschitza a ograniczoność <math>f'(x)</math></li> <li>• Pochodne wyższych rzędów</li> <li>• Wzór Taylora</li> <li>• Wzór Maclaurina</li> <li>• Ekstrema funkcji różniczkowalnych</li> <li>• Warunek konieczny do ekstremum</li> <li>• Trzy warunki dostateczne do ekstremum</li> <li>• Niektóre reguły de l'Hospitala</li> <li>• Wypukłość funkcji różniczkowalnych</li> </ul> | W1, U1                       | Wykład, Ćwiczenia |

| Lp. | Treści programowe dla zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Efekty uczenia się dla zajęć | Formy zajęć       |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 2.  | <b>Funkcje pierwotne</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pojęcie funkcji pierwotnej</li> <li>Funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne</li> <li>Symbol <math>\int f(x)dx</math></li> <li>Liniowość całki nieoznaczonej</li> <li>Całkowanie przez części</li> <li>Wzory rekurencyjne</li> <li>Całkowanie przez podstawienie</li> <li>Całkowanie funkcji wymiernych</li> <li>Całkowanie funkcji trygonometrycznych</li> <li>Całkowanie funkcji niewymiernych</li> <li>Podstawienia Eulera</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                              | W2, U1, U2                   | Wykład, Ćwiczenia |
| 3.  | <b>Całka Riemanna</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Sumy Darboux i ich własności</li> <li>Całka Riemanna</li> <li>Własności sum Darboux</li> <li>Kryterium całkowalności</li> <li>Całkowalność funkcji ciągłych</li> <li>Całkowalność funkcji monotonicznych</li> <li>Liniowość całki Riemana</li> <li>Całkowalność iloczynu i modułu funkcji</li> <li>Monotoniczność całki</li> <li>Całka jako addytywna funkcja przedziału</li> <li>Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego</li> <li>Wzór Newtona-Leibniza</li> <li>Całka Riemanna w geometrii</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                             | W2, U1, U2                   | Wykład, Ćwiczenia |
| 4.  | <b>Szeregi liczbowe</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Co to jest szereg liczbowy</li> <li>Warunki jego zbieżności</li> <li>Szereg geometryczny</li> <li>Działania na szeregach liczbowych</li> <li>Szeregi o wyrazach nieujemnych</li> <li>Kryterium porównawcze</li> <li>Zasada zagęszczania Cauchy'ego</li> <li>Kryterium pierwiastkowe</li> <li>Kryterium ilorazowe</li> <li>Szeregi o wyrazach dowolnych</li> <li>Kryteria Dirichleta, Abela i Leibniza</li> <li>Zbieżność bezwzględna i warunkowa</li> <li>Mnożenie szeregów</li> <li>Twierdzenie Mertensa</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                | W3                           | Wykład, Ćwiczenia |
| 5.  | <b>Ciągi i szeregi funkcyjne</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Zbieżność punktowa ciągu funkcji</li> <li>Supremalna odległość funkcji</li> <li>Zbieżność jednostajna ciągu funkcji</li> <li>Własności algebraiczne tej zbieżności</li> <li>Zbieżność jednostajna zachowuje ciągłość</li> <li>Zbieżność jednostajna zachowuje całkowalność</li> <li>Całka komutuje z granicą jednostajną</li> <li>Zbieżność jednostajna a różniczkowalność</li> <li>Szereg funkcyjny</li> <li>Jego zbieżność punktowa i jednostajna</li> <li>Kryterium Weierstrassa zbieżności jednost.</li> <li>Ciągłość, całkowalność i różniczkowalność granicy jednostajnej</li> <li>Definiowanie funkcji szeregiem funkcyjnym</li> <li>Funkcja ciągła na <math>\mathbb{R}</math> nigdzie nieróżniczkowalna</li> </ul> | W4, U1, U2                   | Wykład, Ćwiczenia |

| Lp. | Treści programowe dla zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Efekty uczenia się dla zajęć | Formy zajęć       |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 6.  | <b>Szeregi potęgowe</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Szereg potęgowy i promień zbieżności</li> <li>Wzór Cauchy-Hadamarda</li> <li>Gdzie szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie</li> <li>Funkcje definiowane szeregami potęgowymi</li> <li>Zbieżność na końcach przedziału zbieżności</li> <li>Funkcja z <math>C^\infty</math> nierozwijalna w szereg potęgowy</li> <li>Szereg Maclaurina funkcji z <math>C^\infty</math></li> <li>Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy</li> </ul> | W5, U1, U2                   | Wykład, Ćwiczenia |
| 7.  | <b>Całki niewłaściwe</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dwa rodzaje całek niewłaściwych</li> <li>Kryteria Cauchy'ego ich zbieżności</li> <li>Kryterium porównawcze</li> <li>Kryterium Dirichleta</li> <li>Warunkowa zbieżność całki</li> <li>Całkowe kryterium zbieżności szeregów liczbowych</li> </ul>                                                                                                                                                                               | W2, U1, U2                   | Wykład, Ćwiczenia |

### Informacje dodatkowe

| Forma zajęć | Metody i formy prowadzenia zajęć |
|-------------|----------------------------------|
| Wykład      | Wykład problemowy                |
| Ćwiczenia   | Praca z tekstem                  |

| Forma zajęć | Warunki zaliczenia zajęć                                                                                 |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wykład      | Zdanie egzaminu pisemnego.<br>Oceny: 3 [51-60 %], 3+ [61-70 %], 4 [71-80 %], 4+ [81-90 %], 5 [91-100 %]. |
| Ćwiczenia   | Zaliczenie dwóch sprawdzianów pisemnych.<br>Oceny: jak wyżej.                                            |

### Literatura

#### Obowiązkowa

1. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część I, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2009.
2. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część II, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2004.
3. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna, Tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.

#### Dodatkowa

1. F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
2. J. Mikusiński, Wstęp do analizy matematycznej, PWN, Warszawa 1990.
3. J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT, Warszawa 2006.

### Nakład pracy studenta i punkty ECTS

| Rodzaje zajęć studenta | Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Wykład                 | 60                                                                  |

|                                     |                             |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| Ćwiczenia                           | 60                          |
| Przygotowanie do zajęć              | 45                          |
| Przygotowanie do egzaminu           | 50                          |
| Przygotowanie do zaliczenia         | 50                          |
|                                     |                             |
| <b>Łączny nakład pracy studenta</b> | <b>Liczba godzin</b><br>265 |
| <b>Liczba punktów ECTS</b>          | <b>ECTS</b><br>10           |

\* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

## Efekty uczenia się dla kierunku

| Kod        | Treść                                                                                                                                                                |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MAT_K1_U03 | Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem analizy matematycznej oraz stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy            |
| MAT_K1_U04 | Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem algebry liniowej oraz abstrakcyjnej i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy |
| MAT_K1_W03 | Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, metody i twierdzenia logiki matematycznej oraz teorii mnogości                                                        |
| MAT_K1_W04 | Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia analizy matematycznej oraz podstawy teorii równań różniczkowych                                  |
| MAT_K1_W05 | Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia algebry abstrakcyjnej i liniowej oraz geometrii                                                  |