



UNIwersYTET
IM. ADAMA MICKIEWICZA
W POZNANIU

Algebra liniowa

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka		Cykl dydaktyczny 2025/26	
Specjalność -		Kod zajęć 06MATS.12P.00217.25	
Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki		Języki wykładowe polski	
Poziom studiów studia pierwszego stopnia		Obligatoryjność Obowiązkowy	
Forma studiów studia stacjonarne		Blok zajęciowy Przedmioty podstawowe	
Profil studiów profil ogólnoakademicki			
Koordynator zajęć	Dorota Blinkiewicz		
Prowadzący zajęcia	Dorota Blinkiewicz		
Okres Semestr 2	Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia - Wykład: 60, Egzamin - Ćwiczenia: 60, Zaliczenie z oceną		Liczba punktów ECTS 10

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	przekazanie wiedzy z zakresu rozwiązywania dowolnych układów równań liniowych;
C2	zapoznanie studentów z rachunkiem na macierzach, algorytmami odwracania macierzy oraz powiązаныmi zagadnieniami;
C3	zapoznanie studentów z pojęciem wyznacznika macierzy i jego zastosowaniach;
C4	zapoznanie studentów z pojęciem przestrzeni liniowych nad dowolnym ciałem oraz powiązаныmi zagadnieniami;
C5	zapoznanie studentów z pojęciem przekształcenia liniowego oraz powiązаныmi zagadnieniami;
C6	przekazanie wiedzy z zakresu algebry liniowej, tj. zapoznanie studentów z pojęciami, metodami i twierdzeniami algebry liniowej oraz przygotowanie podstaw do innych przedmiotów matematycznych.

Wymagania wstępne

Ukończony przedmiot Wstęp do geometrii.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy - Student/ka:			
W1	zna i rozumie podstawowe, jak i bardziej zaawansowane pojęcia i twierdzenia algebry liniowej.	MAT_K1_W01, MAT_K1_W02, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
Umiejętności - Student/ka:			
U1	potrafi rozwiązywać poznanymi metodami dowolne układy równań liniowych oraz określić rząd danej macierzy, znaleźć postacie zredukowane	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U2	potrafi wykonywać operacje na macierzach i stosować ich własności, znajdować macierz odwrotną za pomocą różnych metod, obliczać wyznacznik macierzy kwadratowych (również wyznacznik macierzy $n \times n$), wykorzystywać własności wyznacznika do rozwiązywania różnych zadań, potrafi zastosować wyznacznik (m.in. w celu obliczania rzędu macierzy).	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U3	potrafi rozróżniać struktury algebraiczne; określić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią liniową danej przestrzeni liniowej, czy suma algebraiczna podprzestrzeni liniowych jest sumą prostą, itp.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U4	potrafi badać liniową zależność wektorów, znajdować bazy i wymiary przestrzeni liniowych, znajdować macierz przejścia od bazy do bazy, wyznaczać współrzędne wektorów w bazie; opisywać podprzestrzenie za pomocą równań liniowych, wyznaczać część wspólną podprzestrzeni, wykorzystywać twierdzenie Steinitza o wymianie, itp.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04, MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U5	potrafi rozwiązywać zadania związane z macierzami przekształceń liniowych, m.in. wyznaczać jądra i obrazy przekształceń liniowych oraz znajdować ich bazy i wymiary.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U6	potrafi rozwiązywać problemy związane z przestrzeniami ilorazowymi, m. in. stosować I twierdzenie o izomorfizmie, wyznaczać warstwy, bazę przestrzeni ilorazowej, jej wymiar, itp.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U7	potrafi rozwiązywać zagadnienie własne dla macierzy kwadratowych, jak również dla endomorfizmów liniowych; sprawdzać czy dana przestrzeń jest niezmiennicza względem endomorfizmu; sprowadzać macierze do postaci diagonalnej i wykorzystywać to do przedstawienia macierzy; sprowadzać macierze do postaci normalnej Jordana i wykorzystywać to do przedstawienia.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04, MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U8	potrafi rozwiązywać problemy związane z formami dwuliniowymi/hermitowskimi m.in. znajdować ich radykały, ich reprezentacje macierzowe itp.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U9	potrafi rozwiązywać problemy wykorzystując iloczyn skalarny, m.in. wyznaczyć rzut prostopadły wektora na podprzestrzeń w przestrzeni euklidesowej, stosować algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta, znajdować dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej, znajdować kąt między wektorami, itp.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04, MAT_K1_U05, MAT_K1_U08	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U10	potrafi rozwiązywać zadania związane z formami kwadratowymi, m. in. doprowadzić formę do postaci kanonicznej poznanymi metodami, sprawdzić określoność formy o współczynnikach rzeczywistych, znaleźć macierz formy kwadratowej, diagonalizować macierze symetryczne o współczynnikach rzeczywistych, itp.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04, MAT_K1_U05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U11	potrafi dowodzić i formułować podstawowe, jak i bardziej zaawansowane fakty i twierdzenia algebry liniowej oraz formułować podstawowe, jak i bardziej zaawansowane definicje algebry liniowej.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U04, MAT_K1_U12	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U12	potrafi wykorzystywać pojęcia algebry liniowej w celu rozwiązania problemów matematycznych.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U04, MAT_K1_U08, MAT_K1_U12	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Macierze: macierz o m wierszach n kolumnach i elementach/współczynnikach z dowolnego ciała. Postać zredukowana i całkowicie zredukowana macierzy. Rząd macierzy. Operacje dodawania macierzy, mnożenia macierzy przez skalar oraz mnożenia macierzy. Macierz transponowana i hermitowsko-sprzężona. Własności działań. Ślad macierzy. Macierze elementarne. Macierz odwrotna, odwracalna, osobliwa, nieosobliwa. Algorytm odwracania macierzy za pomocą operacji elementarnych.	W1, U1, U11, U12, U2	Wykład, Ćwiczenia
2.	Układy równań liniowych: układ równań liniowych o współczynnikach z dowolnego ciała. Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego.	W1, U1, U11, U12, U2	Wykład, Ćwiczenia
3.	Wyznaczniki: definicja i własności wyznacznika, obliczanie za pomocą operacji elementarnych, rozwinięcia Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy, zastosowania wyznaczników: związek z rzędem (metoda minorów obejmujących) i z odwracalnością macierzy, wzór algebraiczny na macierz odwrotną, wzory Cramera, wzór permutacyjny na wyznacznik macierzy, wybrane typy wyznaczników $n \times n$, np. wyznacznik Vandermonde'a, czy wyznacznik macierzy cyklicznej.	W1, U1, U11, U12, U2	Wykład, Ćwiczenia
4.	Przestrzenie liniowe: Przestrzeń liniowa i podprzestrzeń liniowa. Opisywanie podprzestrzeni za pomocą układów równań liniowych. Układ wektorów oraz kombinacja liniowa układu wektorów. Powłoka liniowa układu wektorów. Liniowa niezależność oraz liniowa zależność układu wektorów. Baza i wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne wektora względem bazy. Twierdzenie Steinitza o wymianie. Suma prosta i algebraiczna podprzestrzeni liniowych. Macierz przejścia od bazy do bazy.	W1, U11, U12, U3, U4	Wykład, Ćwiczenia
5.	Przekształcenia liniowe + przestrzenie ilorazowe (w tym macierze przekształceń liniowych): przekształcenie liniowe, funkcja liniowa oraz przestrzeń dualna. Monomorfizm, epimorfizm i izomorfizm przestrzeni liniowych oraz automorfizm i endomorfizm/operator liniowy przestrzeni liniowej. Własności przekształcenia liniowego. Zadawanie przekształcenia liniowego przez wartości na bazie. Przestrzenie przekształceń liniowych, dodawanie i mnożenie przekształcenia liniowego przez skalar, składanie przekształceń liniowych. Jądro i obraz przekształcenia liniowego, własności jądra i obrazu. Każda przestrzeń K -liniowa wymiaru n jest izomorficzna z K^n , związek wymiaru jądra z wymiarem obrazu przekształcenia liniowego, przestrzeń ilorazowa V/W , I twierdzenie o izomorfizmie dla przestrzeni liniowych. Macierz przekształcenia liniowego w bazach, zmiana macierzy przekształcenia przy zamianie baz.	W1, U11, U12, U5, U6	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
6.	Zagadnienie własne (dla macierzy i endomorfizmów, w tym diagonalizacja, postać Jordana): macierze podobne, wyznacznik i ślad endomorfizmu, twierdzenie Cayleya-Hamiltona, wektory własne, wartości własne i ich krotności, podprzestrzenie własne macierzy/endomorfizmu liniowego, wielomian charakterystyczny, wielomian minimalny, macierze diagonalizowalne, kryteria na diagonalizowalność macierzy, klatki Jordana, twierdzenie Jordana o postaci kanonicznej macierzy endomorfizmu liniowego, zastosowania. Podprzestrzenie niezmiennicze względem endomorfizmu.	W1, U11, U12, U7	Wykład, Ćwiczenia
7.	Formy dwuliniowe, kwadratowe: Forma dwuliniowa, forma hermitowska, radykał lewo- i prawostronny formy, macierz formy w bazie, zmiana macierzy formy przy zamianie bazy.	W1, U11, U12, U8	Wykład, Ćwiczenia
8.	Iloczyn skalarny, przestrzenie euklidesowe, unitarne: Iloczyn skalarny, przestrzeń euklidesowa i unitarna, algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta, rzut prostopadły wektora na podprzestrzeń w przestrzeni euklidesowej, dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej, kąt między wektorami, przekształcenia liniowe zachowujące iloczyn skalarny, izometrie liniowe, macierze ortogonalne, macierze hermitowskie, przekształcenia i macierze unitarne.	W1, U11, U12, U9	Wykład, Ćwiczenia
9.	Forma kwadratowa, macierz formy. Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej różnymi metodami. Formy kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych i ich określoność, twierdzenie Sylwestera o bezwładności, kryterium Sylwestera o określoności formy, diagonalizacja macierzy symetrycznych o współczynnikach rzeczywistych. Zastosowania: klasyfikacja stożkowych i kwadryk.	W1, U10, U11, U12	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień, Wykład konwersatoryjny, Wykład problemowy
Ćwiczenia	Uczenie problemowe (Problem-based learning), Rozwiązywanie zadań (np.: obliczeniowych, artystycznych, praktycznych), Metoda ćwiczeniowa, Metoda aktywizująca - "burza mózgów"

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	W sesji egzaminacyjnej odbędzie się egzamin pisemny. Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń, tj. uzyskanie co najmniej oceny dostateczny (3,0). Obowiązuje następująca skala ocen: bardzo dobry (bdb; 5,0): powyżej 90% punktów możliwych do uzyskania; dobry plus (+db; 4,5): powyżej 80% punktów możliwych do uzyskania; dobry (db; 4,0): powyżej 70% punktów możliwych do uzyskania; dostateczny plus (+dst; 3,5): powyżej 60% punktów możliwych do uzyskania; dostateczny (dst; 3,0): powyżej 50% punktów możliwych do uzyskania; niedostateczny (ndst; 2,0): 50% punktów możliwych do uzyskania lub mniej.

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Ćwiczenia	Obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa. W trakcie semestru odbędą się dwa lub trzy kolokwia, za każde będzie można zdobyć 100 punktów maksymalnie. Nieusprawiedliwienie nieobecności na kolokwium skutkuje otrzymaniem za nie zera punktów. Prowadzący może nagradzać studentów punktami za aktywność, które będą na końcu doliczane do otrzymanych punktów z kolokwii. O ocenie końcowej zadecyduje suma zdobytych punktów wg następującej skali: bardzo dobry (bdb; 5,0): powyżej 90% punktów możliwych do zdobycia na kolokwiach; dobry plus (+db; 4,5): powyżej 80% punktów możliwych do zdobycia na kolokwiach; dobry (db; 4,0): powyżej 70% punktów możliwych do zdobycia na kolokwiach; dostateczny plus (+dst; 3,5): powyżej 60% punktów możliwych do zdobycia na kolokwiach; dostateczny (dst; 3,0): powyżej 50% punktów możliwych do zdobycia na kolokwiach; niedostateczny (ndst; 2,0): 50% punktów możliwych do zdobycia na kolokwiach lub mniej. Jeśli student nie zaliczy ćwiczeń, to na końcu semestru odbędzie się jedno kolokwium poprawkowe z całego semestru. W wypadku zaliczenia kolokwium poprawkowego, tj. zdobycia powyżej 50% możliwych do zdobycia, wynik procentowy będzie obliczany następująco: $\max(50\%, \text{średnia arytmetyczna procentowego wyniku z ćwiczeń <przed poprawką> i procentowego wyniku poprawy})$. Następnie stosowana będzie wyżej napisana skala ocen.

Literatura

Obowiązkowa

1. Grzegorz Banaszak, Wojciech Gajda, Elementy Algebry Liniowej cz.1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2002
2. Grzegorz Banaszak, Wojciech Gajda, Elementy Algebry Liniowej cz.2, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2002
3. Jerzy Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008

Dodatkowa

1. William A. Adkins, Steven H. Weintraub, Algebra: An Approach Via Module Theory, GTM 136, Springer, 1992, 1999
2. Aleksiej I. Kostrikin, Wstęp do algebry 2, Algebra liniowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004, 2021
3. Aleksiej I. Kostrikin, Zbiór zadań z algebry, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005, 2020
4. J.Chaber, R.Pol, GAL, skrypt MIMUW, Warszawa 2015
5. L. Strang, Introduction to linear algebra 6th ed., MIT 2023
6. G.E. Shilov, "Linear Algebra", revised English Edition & Edited by Richard A. Silverman, Dover Publications, Garen City, New York, 1977

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	60
Ćwiczenia	60
Czytanie wskazanej literatury	30
Przygotowanie do zajęć	60
Przygotowanie do egzaminu	45
Przygotowanie do zaliczenia	45

Łączny nakład pracy studenta	Liczba godzin 300
Liczba punktów ECTS	ECTS 10

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K1_U01	Absolwent/ka potrafi posługiwać się formalizmem matematycznym przy definiowaniu pojęć, formułowaniu twierdzeń i budowie prostych modeli matematycznych
MAT_K1_U02	Absolwent/ka potrafi konstruować logiczną argumentację z klarowną identyfikacją założeń i konkluzji oraz wykazać się biegłością w zakresie różnych metod prowadzenia dowodu matematycznego
MAT_K1_U04	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem algebry liniowej oraz abstrakcyjnej i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U05	Absolwent/ka potrafi posługiwać się pojęciami i twierdzeniami geometrii i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U08	Absolwent/ka potrafi rozpoznawać i rozwiązywać problemy, w tym zagadnienia praktyczne, które można rozstrzygnąć z użyciem narzędzi matematycznych
MAT_K1_U12	Absolwent/ka potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień matematycznych i wytłumaczyć ich konsekwencje niespecjalistom
MAT_K1_W01	Absolwent/ka zna i rozumie cywilizacyjne znaczenie matematyki i jej zastosowań
MAT_K1_W02	Absolwent/ka zna i rozumie teorie matematyczne w stopniu umożliwiającym stosowanie formalizmu matematycznego do rozwiązywania problemów z różnych obszarów wiedzy
MAT_K1_W05	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia algebry abstrakcyjnej i liniowej oraz geometrii