

## Modele liniowe

### Sylabus zajęć

#### Informacje podstawowe

|                                                                    |                                                                                                                                                                     |                                                |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| <b>Kierunek studiów</b><br>Matematyka                              |                                                                                                                                                                     | <b>Cykl dydaktyczny</b><br>2025/26             |
| <b>Specjalność</b><br>Statystyka i analiza danych                  |                                                                                                                                                                     | <b>Kod zajęć</b><br>06MATSADS.21K.00348.25     |
| <b>Jednostka organizacyjna</b><br>Wydział Matematyki i Informatyki |                                                                                                                                                                     | <b>Języki wykładowe</b><br>polski              |
| <b>Poziom studiów</b><br>studia drugiego stopnia                   |                                                                                                                                                                     | <b>Obligatoryjność</b><br>Obowiązkowy          |
| <b>Forma studiów</b><br>studia stacjonarne                         |                                                                                                                                                                     | <b>Blok zajęciowy</b><br>Przedmioty kierunkowe |
| <b>Profil studiów</b><br>profil ogólnoakademicki                   |                                                                                                                                                                     |                                                |
| <b>Koordynator zajęć</b>                                           | Łukasz Smaga                                                                                                                                                        |                                                |
| <b>Prowadzący zajęcia</b>                                          | Łukasz Smaga                                                                                                                                                        |                                                |
| <b>Okres</b><br>Semestr 1                                          | <b>Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Wykład: 30, Egzamin</li><li>Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną</li></ul> | <b>Liczba punktów ECTS</b><br>6                |

#### Cele kształcenia dla zajęć

| Kod | Cel                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| C1  | Celem przedmiotu jest przedstawienie różnych modeli liniowymi. W szczególności, zwracana będzie uwaga na: odpowiednie rozpoznanie, który model należy stosować w danych przypadku; różnice między modelami; wykorzystanie wybranego języka programowania do wykonania odpowiednich analiz statystycznych. |

#### Wymagania wstępne

Podstawowa wiedza z rachunku prawdopodobieństwa (głównie: zmienne losowe i ich momenty), statystyki matematycznej, programowania

## Efekty uczenia się dla zajęć

| Kod                               | Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie                                                                                                                                                                                                 | Efekty uczenia się dla kierunku          | Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <b>Wiedzy - Student/ka:</b>       |                                                                                                                                                                                                                                         |                                          |                                                              |
| W1                                | zna i rozumie pojęcie układu kompletnej randomizacji, układu bloków kompletnie zrandomizowanych, układu blokowego o jednostkach rozszczepionych, układu blokowego o jednostkach rozszczepionych w pasach prostopadłych.                 | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W2                                | zna i rozumie metody analizy wariancji w różnych układach doświadczalnych.                                                                                                                                                              | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne,<br>Projekt            |
| W3                                | zna i rozumie pojęcie interakcji.                                                                                                                                                                                                       | MAT_K2_W04                               | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W4                                | zna i rozumie specyfikę hierarchicznej analizy wariancji.                                                                                                                                                                               | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W5                                | zna i rozumie pojęcia kwadratu łańciskiego i grecko-łańciskiego, ich wady i zalety.                                                                                                                                                     | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W6                                | zna i rozumie różnice między modelami stałymi, losowymi i mieszanymi.                                                                                                                                                                   | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W7                                | zna i rozumie różnice między obserwacjami niezależnymi i zależnymi oraz pojęcie obserwacji powtarzanych.                                                                                                                                | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W8                                | zna i rozumie model i zastosowanie analizy kowariancji.                                                                                                                                                                                 | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W9                                | zna i rozumie ograniczenia metod parametrycznych i metody radzenia sobie w przypadku niespełnienia ich założeń.                                                                                                                         | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| W10                               | zna i rozumie pojęcie hipotezy liniowej, testy typu Walda oraz różne metody przybliżania rozkładu statystyki testowej.                                                                                                                  | MAT_K2_W01,<br>MAT_K2_W03,<br>MAT_K2_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| <b>Umiejętności - Student/ka:</b> |                                                                                                                                                                                                                                         |                                          |                                                              |
| U1                                | potrafi zaplanować eksperyment według układu kompletnej randomizacji, układu bloków kompletnie zrandomizowanych, układu blokowego o jednostkach rozszczepionych, układu blokowego o jednostkach rozszczepionych w pasach prostopadłych. | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U2                                | potrafi przeprowadzić analizę wariancji w różnych układach doświadczalnych.                                                                                                                                                             | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne,<br>Projekt            |
| U3                                | potrafi wykryć interakcję lub jej brak na podstawie wizualizacji i analizy statystycznej danych.                                                                                                                                        | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U4                                | potrafi wykorzystać model hierarchicznej analizy wariancji w badaniach statystycznych.                                                                                                                                                  | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |

| Kod                                          | Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie                                                                                                                | Efekty uczenia się dla kierunku | Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| U5                                           | potrafi przeprowadzić odpowiednią analizę danych otrzymanych w wyniku eksperymentu zaplanowanego w układzie kwadratu łacińskiego i grecko-łacińskiego. | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U6                                           | potrafi zastosować metody nieparametryczne w adekwatnym przypadku.                                                                                     | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U7                                           | potrafi przyjąć odpowiedni model mieszany i dokonać testowania hipotez statystycznych w takim modelu.                                                  | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U8                                           | potrafi wykonać analizę statystyczną powtarzanych pomiarów.                                                                                            | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U9                                           | potrafi przeprowadzić analizę kowariancji w adekwatnym przypadku.                                                                                      | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U10                                          | potrafi zaimplementować i wykorzystać asymptotyczne i resamplingowe testy typu Walda.                                                                  | MAT_K2_U03,<br>MAT_K2_U06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| <b>Kompetencji społecznych – Student/ka:</b> |                                                                                                                                                        |                                 |                                                              |
| K1                                           | jest gotów/gotowa do zrozumienia wpływu metod planowania i analizowania wyników eksperymentów na życie społeczne.                                      | MAT_K2_K05,<br>MAT_K2_K06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne,<br>Projekt            |
| K2                                           | jest gotów/gotowa do dalszego zgłębiania wiedzy i umiejętności w zakresie metod planowania i analizowania rezultatów doświadczeń.                      | MAT_K2_K01,<br>MAT_K2_K06       | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne,<br>Projekt            |
| K3                                           | jest gotów/gotowa do przedstawiania, wyjaśniania i rozwijania poznanych metod statystycznych.                                                          | MAT_K2_K06                      | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne,<br>Projekt            |

### Treści programowe dla zajęć

| Lp. | Treści programowe dla zajęć                                                                                                                                                                | Efekty uczenia się dla zajęć | Formy zajęć       |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 1.  | Układ kompletnej randomizacji, układ bloków kompletnie zrandomizowanych i ich generowanie                                                                                                  | W1, U1, K1, K2, K3           | Wykład, Ćwiczenia |
| 2.  | Jednoczynnikowa analiza wariancji - test F analizy wariancji, sprawdzanie założeń, testy post hoc, analiza kontrastów, testowanie zerowania się wszystkich wartości oczekiwanych w grupach | W2, U2, K1, K2, K3           | Wykład, Ćwiczenia |
| 3.  | Test F analizy wariancji w układzie bloków kompletnie zrandomizowanych, testy post hoc                                                                                                     | W2, U2, K1, K2, K3           | Wykład, Ćwiczenia |
| 4.  | Dwu- i wieloczynnikowa analiza wariancji – testy F analizy wariancji, interakcje oraz ich wykrywanie i interpretacja                                                                       | W2, W3, U2, U3, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |
| 5.  | Hierarchiczna analiza wariancji                                                                                                                                                            | W2, W4, U2, U4, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |
| 6.  | Układ blokowy o jednostkach rozszczepionych - generowanie planu eksperymentu, test F analizy wariancji w tym układzie, testy post hoc                                                      | W1, W2, U1, U2, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |

| Lp. | Treści programowe dla zajęć                                                                                                                                                                                                            | Efekty uczenia się dla zajęć | Formy zajęć       |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 7.  | Układ blokowy o jednostkach rozszczepionych w pasach prostopadłych - generowanie planu eksperymentu, test F analizy wariancji w tym układzie, testy post hoc                                                                           | W1, W2, U1, U2, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |
| 8.  | Kwadrat łaciński i grecko-łaciński - generowanie planu eksperymentu, test F analizy wariancji w tych układach, względna efektywność tych układów, testy post hoc                                                                       | W2, W5, U2, U5, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |
| 9.  | Modele mieszane - różnice między modelami stałymi, losowymi i mieszanymi oraz ich rozpoznawanie, testy istotności efektów stałych i losowych                                                                                           | W2, W6, U2, U7, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |
| 10. | Analiza powtarzanych pomiarów - test F analizy wariancji z powtarzanymi pomiarami, założenia i ich weryfikacja, metody radzenia sobie w przypadku niespełnienia założeń                                                                | W2, W7, U2, U8, K1, K2, K3   | Wykład, Ćwiczenia |
| 11. | Analiza kowariancji - podstawy regresji liniowej, połączenie analizy regresji i wariancji                                                                                                                                              | W8, U9, K1, K2, K3           | Wykład, Ćwiczenia |
| 12. | Testy Kruskala-Wallisa i Friedmana - przykłady testów nieparametrycznej analizy wariancji, rangi i ich wykorzystanie do testowania hipotez statystycznych, testy post hoc, porównanie mocy testów parametrycznych i nieparametrycznych | W9, U6, K1, K2, K3           | Wykład, Ćwiczenia |
| 13. | Testowanie dowolnych hipotez liniowych - testy typu Walda, test asymptotyczny, testy resamplingowe                                                                                                                                     | W10, U10, K1, K2, K3         | Wykład, Ćwiczenia |

### Informacje dodatkowe

| Forma zajęć | Metody i formy prowadzenia zajęć                       |
|-------------|--------------------------------------------------------|
| Wykład      | Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień |
| Ćwiczenia   | Metoda ćwiczeniowa, Metoda laboratoryjna               |

| Forma zajęć | Warunki zaliczenia zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wykład      | Warunkiem przystąpienia do egzaminu jest uzyskanie zaliczenia z ćwiczeń.<br>Na końcową ocenę składa się wynik uzyskany na egzaminie pisemnym.<br>Skala ocen:<br>1. bardzo dobry (bdb; 5,0) - od 90% punktów,<br>2. dobry plus (db plus; 4,5) - od 80% punktów,<br>3. dobry (db; 4,0) - od 70% punktów,<br>4. dostateczny plus (dst plus; 3,5) - od 60% punktów,<br>5. dostateczny (dst; 3,0) - od 50% punktów,<br>6. niedostateczny (ndst; 2,0) - poniżej 50% punktów. |
| Ćwiczenia   | Na końcową ocenę składa się wynik uzyskany na kolokwium pisemnym (90%) oraz projekt (10%).<br>Skala ocen:<br>1. bardzo dobry (bdb; 5,0) - od 90% punktów,<br>2. dobry plus (db plus; 4,5) - od 80% punktów,<br>3. dobry (db; 4,0) - od 70% punktów,<br>4. dostateczny plus (dst plus; 3,5) - od 60% punktów,<br>5. dostateczny (dst; 3,0) - od 50% punktów,<br>6. niedostateczny (ndst; 2,0) - poniżej 50% punktów.                                                    |

## Literatura

### Obowiązkowa

1. Biecek P. (2011) Analiza danych z programem R. Modele liniowe z efektami stałymi, losowymi i mieszanymi. Wydawnictwo Naukowe PWN.
2. Box G.E.P., Hunter J.S., Hunter W.G. (2005) Statistics for experiments. John Wiley & Sons Inc.
3. Hay-Jahans C. (2012) An R companion to linear statistical models. Chapman & Hall.
4. Kozłowska M. (2014) Przewodnik po dobrej praktyce eksperymentalnej. PTB i PRODRUK.
5. Lawson J. (2014) Design and analysis of experiments with R. Chapman & Hall.
6. Oktaba W. (1974) Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa. PWN.
7. Oktaba W. (1980) Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie. PWN.

### Nakład pracy studenta i punkty ECTS

| Rodzaje zajęć studenta              | Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Wykład                              | 30                                                                  |
| Ćwiczenia                           | 30                                                                  |
| Przygotowanie do zajęć              | 20                                                                  |
| Czytanie wskazanej literatury       | 30                                                                  |
| Przygotowanie projektu              | 15                                                                  |
| Przygotowanie do egzaminu           | 35                                                                  |
| Przygotowanie do zaliczenia         | 20                                                                  |
|                                     |                                                                     |
| <b>Łączny nakład pracy studenta</b> | <b>Liczba godzin</b><br>180                                         |
| <b>Liczba punktów ECTS</b>          | <b>ECTS</b><br>6                                                    |

\* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

## Efekty uczenia się dla kierunku

| Kod        | Treść                                                                                                                                                                                                     |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MAT_K2_K01 | Absolwent/ka jest gotów/gotowa do dalszego ustawicznego kształcenia                                                                                                                                       |
| MAT_K2_K05 | Absolwent/ka jest gotów/gotowa do krytycznego przyjmowania i weryfikacji twierdzeń i wniosków, a także do wskazywania braków w ich uzasadnieniu                                                           |
| MAT_K2_K06 | Absolwent/ka jest gotów/gotowa do wyrażania zdania i jego logicznego uzasadnienia w zagadnieniach, które używają matematyki jako języka opisu                                                             |
| MAT_K2_U03 | Absolwent/ka potrafi zrozumiale przedstawić osiągnięcia matematyki i omówić jej różnorodne zastosowania                                                                                                   |
| MAT_K2_U06 | Absolwent/ka potrafi odnosić pojęcia matematyczne do niematematycznych kontekstów, w analizowanych problemach potrafi dostrzec i wykorzystać struktury formalne opisywane w wybranych działach matematyki |
| MAT_K2_W01 | Absolwent/ka zna i rozumie klasyczne pojęcia z zakresu matematyki i jej zastosowań oraz najważniejsze metody i twierdzenia z głównych jej działów                                                         |
| MAT_K2_W03 | Absolwent/ka zna i rozumie podstawy konstruowania modeli matematycznych przydatnych w zastosowaniach matematyki w różnych dziedzinach wiedzy                                                              |
| MAT_K2_W04 | Absolwent/ka zna i rozumie specjalistyczne zagadnienia z wybranej dziedziny matematyki                                                                                                                    |