



UNIWERSYTET
IM. ADAMA MICKIEWICZA
W POZNANIU

Algebra liniowa z zastosowaniami 1

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Informatyka Specjalność - Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki Poziom studiów studia inżynierskie pierwszego stopnia Forma studiów studia niestacjonarne Profil studiów profil ogólnoakademicki		Cykl dydaktyczny 2025/26 Kod zajęć 06INFN.32P.04800.25 Języki wykładowe polski Obligatoryjność Obowiązkowy Blok zajęciowy Przedmioty podstawowe
Koordynator zajęć	Barbara Kołodziejczak, Dominika Wojtera-Tyrakowska	
Prowadzący zajęcia	Barbara Kołodziejczak, Dominika Wojtera-Tyrakowska	
Okres Semestr 2	Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia - Wykład: 15, Zaliczenie z oceną - Ćwiczenia: 15, Zaliczenie z oceną - Ćwiczenia w salach komputerowych: 7, Zaliczenie z oceną	Liczba punktów ECTS 5

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem przedmiotu jest zapoznanie studentek i studentów informatyki z podstawowymi pojęciami i zadaniami algebry liniowej oraz metodami numerycznymi algebry liniowej przydatnymi w studiach i praktyce informatycznej.

Wymagania wstępne

Wiedza z przedmiotów: Wstęp do matematyki, Wstęp do informatyki, Podstawy programowania

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy - Student/ka:			
W1	zna pojęcie wektora i macierzy o elementach z różnych ciał oraz podstawowe działania na nich	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne, Test
W2	zna pojęcia macierzy układu liniowych równań algebraicznych, zbioru rozwiązań oraz rozumie metody rozwiązywania układów równań	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne, Test
W3	rozumie potrzebę stosowania metod numerycznych do rozwiązywania problemów matematycznych oraz ograniczenia z tego wynikające	INF_K3_W01	Test, Raport
W4	zna i rozumie twierdzenia algebry liniowej (m.in. tw. Kroneckera-Capellego, Laplace'a, Cauchy'ego)	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne
W5	zna pojęcia przestrzeni liniowej wektorów, liniowej niezależności wektorów i bazy wektorów	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne, Test
W6	zna pojęcie wyznacznika, sposoby jego obliczania oraz własności wyznacznika	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne, Test
W7	zna zaprezentowane algorytmy numerycznej algebry liniowej	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne, Test, Raport
W8	zna pojęcie macierzy odwrotnej oraz metody obliczania odwrotności macierzy nieosobliwych	INF_K3_W01	Kolokwium pisemne, Test, Raport
Umiejętności - Student/ka:			
U1	potrafi wykonać działania na wektorach i macierzach oraz opisać wektor/macierz o wybranych własnościach	INF_K3_U01_inz, INF_K3_U05_inz	Kolokwium pisemne, Test
U2	rozwiązuje układy liniowych równań algebraicznych opisane macierzą niskiego stopnia i umie wyjaśnić metody rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych w przypadku macierzy wyższych stopni	INF_K3_U01_inz, INF_K3_U05_inz	Kolokwium pisemne, Test, Raport
U3	stosuje poznane na zajęciach metody numeryczne do rozwiązywania zagadnień sformułowanych w języku algebry liniowej	INF_K3_U01_inz, INF_K3_U05_inz, INF_K3_U06_inz	Test, Raport
U4	oblicza wyznacznik i rząd macierzy niskiego stopnia, zna metody obliczania wyznacznika i rzędu macierzy wyższych stopni, wyciąga wnioski o własnościach macierzy na podstawie jej wyznacznika lub rzędu	INF_K3_U01_inz, INF_K3_U05_inz, INF_K3_U06_inz	Kolokwium pisemne, Test, Raport
U5	potrafi zdefiniować macierz odwrotną, odwracalną, osobliwą, nieosobliwą oraz obliczyć odwrotność macierzy nieosobliwej niskiego stopnia; wskazuje metody obliczania odwrotności macierzy nieosobliwej wyższych stopni; potrafi podać własności macierzy odwracalnych	INF_K3_U01_inz, INF_K3_U05_inz	Kolokwium pisemne, Test, Raport
U6	umie podać przykłady przestrzeni i podprzestrzeni liniowych; potrafi badać własności liniowych kombinacji wektorów	INF_K3_U01_inz	Kolokwium pisemne, Test, Raport

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U7	potrafi rozwiązywać zadania posługując się pojęciem bazy	INF_K3_U01_inz, INF_K3_U04_inz, INF_K3_U05_inz	Kolokwium pisemne, Raport
U8	potrafi podać przykłady przekształceń liniowych między różnymi przestrzeniami liniowymi; umie określić, czy dane przekształcenie jest przekształceniem liniowym; umie wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego	INF_K3_U01_inz	Kolokwium pisemne, Test, Raport

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Punkty i wektory w przestrzeni. Przekształcenie liniowe – intuicyjne wprowadzenie działań na wektorach i macierzach. Macierz kwadratowa, prostokątna, macierz transponowana, hermitowsko-sprzężona, jednostkowa (identycznościowa), zerowa, trójkątna górna, trójkątna dolna, pasmowa. Rachunek macierzowy. Iloczyn skalarny wektorów o współrzędnych rzeczywistych (w tym przedstawienie zasadności skalowania współrzędnych wektora przy obliczeniach iloczynu skalarnego na komputerze).	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia, Ćwiczenia w salach komputerowych
2.	Układy liniowych równań liniowych – zapis macierzowy. Rozwiązanie układów liniowych równań algebraicznych za pomocą operacji elementarnych wykonywanych na macierzy rozszerzonej układu. Postać zredukowana i całkowicie zredukowana macierzy, rząd macierzy. Tw. Kroneckera-Capellego. Macierz odwrotna, odwracalna, osobliwa, nieosobliwa. Odwrotność macierzy uzyskana za pomocą operacji elementarnych.	W2, W4, W8, U2, U5	Wykład, Ćwiczenia
3.	Rozwiązanie układów liniowych równań algebraicznych o elementach z ciała liczb rzeczywistych metodą eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego. Przyczyny niestabilności numerycznej tego algorytmu. Metoda eliminacji Gaussa z częściowym i pełnym wyborem elementu głównego. Zapis kroków metody eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego za pomocą macierzy przekształceń elementarnych. Przykłady zastosowania metody eliminacji Gaussa dla układów liniowych równań algebraicznych z macierzami o elementach z ciał skończonych.	W1, W2, W3, U2, U3	Wykład, Ćwiczenia, Ćwiczenia w salach komputerowych
4.	Przestrzeń i podprzestrzeń liniowa. Przykłady podprzestrzeni przestrzeni $R^{n \times n}$. Układ wektorów, kombinacja liniowa układu wektorów. Wymiar podprzestrzeni, a rząd macierzy. Liniowa zależność i niezależność układu wektorów wraz z przykładami i wymaganymi twierdzeniami.	W4, W5, U6	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
5.	Przekształcenie liniowe – formalna definicja. Przykłady przekształceń liniowych. Macierz przekształcenia liniowego. Sprawdzanie, czy funkcja jest przekształceniem liniowym. Sprawdzanie, czy istnieje przekształcenie liniowe zadane przez konkretne przyporządkowanie wektorów.	W5, U8	Wykład, Ćwiczenia
6.	Baza i wymiar przestrzeni liniowej; przykłady baz przestrzeni liniowych skończonego wymiaru; sprawdzanie, czy dany układ wektorów tworzy bazę danej przestrzeni liniowej. Baza a wyznacznik i rząd macierzy. Współrzędne wektora względem bazy. Znajdowanie bazy wśród układu wektorów rozpinających daną przestrzeń; znajdowanie bazy danej przestrzeni liniowej; obliczanie wymiaru danej przestrzeni liniowej.	W4, W5, U7	Wykład, Ćwiczenia
7.	Wyznacznik macierzy kwadratowej i jego własności. Twierdzenie Laplace'a. Schemat Sarrusa. Definicja wyznacznika w oparciu o permutacje. Twierdzenie Cauchy'ego. Minory (główne, wiodące). Wykorzystanie wyznaczników do obliczania rzędu macierzy (metoda minorów obejmujących) i rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych (wzory Cramera). Porównanie metody rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych wykorzystującej wzory Cramera z metodą eliminacji Gaussa w kontekście obliczeń na dużych układach równań.	W2, W4, W6, U2, U3, U4	Wykład, Ćwiczenia, Ćwiczenia w salach komputerowych
8.	Rozkład LU uzyskany algorytmem eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego i metodą Doolittle'a. Numeryczne obliczanie wyznacznika macierzy. Macierz dołączona i obliczanie odwrotności macierzy w oparciu o macierz dołączoną. Numeryczne obliczanie odwrotności macierzy - zastosowanie rozkładu LU do rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych o stałej macierzy układu i zmieniającym się wektorze wyrazów wolnych.	W6, W7, W8, U3, U4, U5	Wykład, Ćwiczenia, Ćwiczenia w salach komputerowych

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień, Praca z tekstem
Ćwiczenia	Metoda ćwiczeniowa, Praca w grupach
Ćwiczenia w salach komputerowych	Metoda analizy przypadków, Metoda ćwiczeniowa, Metoda laboratoryjna, Metoda projektu, Praca w grupach

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Warunkiem przystąpienia do kolokwium pisemnego w pierwszym terminie jest otrzymanie przed kolokwium pozytywnej oceny z ćwiczeń oraz z ćwiczeń w salach komputerowych. Ocena końcowa zostanie wystawiona na podstawie kolokwium pisemnego i aktywności na wykładach w formie testów. Skala ocen: bardzo dobry (bdb; 5,0) – od 90% punktów dobry plus (db plus; 4,5) – od 80% punktów dobry (db; 4,0) – od 70% punktów dostateczny plus (dst plus; 3,5) – od 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) – od 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) – poniżej 50% punktów
Ćwiczenia	Ocena końcowa zostanie wystawiona na podstawie dwóch kolokwium pisemnych (każde po 50%). Skala ocen: bardzo dobry (bdb; 5,0) – od 90% punktów dobry plus (db plus; 4,5) – od 80% punktów dobry (db; 4,0) – od 70% punktów dostateczny plus (dst plus; 3,5) – od 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) – od 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) – poniżej 50% punktów
Ćwiczenia w salach komputerowych	Ocena końcowa zostanie wystawiona na podstawie rozwiązanych zadań i testów. Skala ocen: bardzo dobry (bdb; 5,0) – od 90% punktów dobry plus (db plus; 4,5) – od 80% punktów dobry (db; 4,0) – od 70% punktów dostateczny plus (dst plus; 3,5) – od 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) – od 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) – poniżej 50% punktów

Literatura

Obowiązkowa

1. Banaszak G., Gajda W., Elementy algebry liniowej cz.1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2002
2. Cohen M.X., Linear algebra, Theory, Intuition, Code, sincXpress, 2021
3. Kajetanowicz P., Wierzejewski J., Algebra z geometrią analityczną, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008
4. Kiusalaas J., Numerical methods in engineering with Python, Cambridge UP, 2010
5. Rutkowski J., Algebra liniowa w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN 2008

Dodatkowa

1. Bjorck A., Dahlquist G., Metody numeryczne, wydanie dowolne
2. Larson R., Elementary linear algebra, BROOKS/COLE CENGAGE Learning, wyd. 7 lub 8
3. Zakrzewski M., Markowe wykłady z matematyki, algebra z geometrią, GiS, 2015

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	15
Ćwiczenia	15
Ćwiczenia w salach komputerowych	7

Przygotowanie do zajęć	30
Przygotowanie raportu	18
Przygotowanie do zaliczenia	30
Czytanie wskazanej literatury	10
Łączny nakład pracy studenta	Liczba godzin 125
Liczba punktów ECTS	ECTS 5

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
INF_K3_U01_inz	Absolwent/ka potrafi zastosować wiedzę matematyczną do formułowania, modelowania, analizowania i rozwiązywania prostych zadań związanych z informatyką
INF_K3_U04_inz	Absolwent/ka potrafi opracować, przeanalizować, zaprojektować klasyczne algorytmy i systemy informatyczne
INF_K3_U05_inz	Absolwent/ka potrafi pisać, uruchamiać i testować programy w wybranym środowisku programistycznym
INF_K3_U06_inz	Absolwent/ka potrafi ocenić, na podstawowym poziomie, przydatność metod i narzędzi informatycznych oraz wybrać i zastosować właściwą metodę i narzędzia do typowych zadań informatycznych
INF_K3_W01	Absolwent/ka zna i rozumie zaawansowane pojęcia z działów matematyki służące do modelowania i rozwiązywania problemów w informatyce