



UNIWERSYTET
IM. ADAMA MICKIEWICZA
W POZNANIU

Analiza harmoniczna Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka		Cykl dydaktyczny 2023/24
Specjalność -		Kod zajęć 06MATS.24K.03624.23
Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki		Języki wykładowe polski
Poziom studiów studia drugiego stopnia		Obligatoryjność Fakultatywny
Forma studiów studia stacjonarne		Blok zajęciowy Przedmioty kierunkowe
Profil studiów profil ogólnoakademicki		
Koordynator zajęć	Leszek Skrzypczak	
Prowadzący zajęcia	Leszek Skrzypczak	
Okres Semestr 3	Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia • Wykład: 30, Egzamin • Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną	Liczba punktów ECTS 6

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem wykładu jest przedstawienie podstawowych idei analizy harmonicznej na przykładzie funkcji wielu zmiennych. Omówione zostaną najważniejsze pojęcia analizy harmonicznej na n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej oraz łączące je związki jak i ich zastosowania. Analiza harmoniczna, zwana również analizą fourierowską, powstała w pierwszej połowie XIX wieku, jako metoda „rozkładu” dowolnej funkcji na „proste składniki”, oraz metoda syntezy tych „prostych składników” w dowolną funkcję. Impulsem do powstania analizy harmonicznej były próby znajdowania rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych fizyki matematycznej, w szczególności równia przewodnictwa ciepła. Po dzień dzisiejszy jest ona dynamicznie rozwijającym się działem analizy, który znajduje wiele zastosowań, nie tylko w tym teorii równań różniczkowych cząstkowych, ale również w analizie sygnałowej, w teorii aproksymacji, w probabilistyce, teorii spektralnej operatorów i innych.

Wymagania wstępne

Znajomość podstaw analizy matematycznej, miary i całki oraz analizy funkcjonalnej.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy - Student/ka:			
W1	Zna przestrzenie funkcji całkowalnych z p -tą potęgą i ich podstawowe własności w tym zupełność i dualność. Wie co to są operatory silnego i słabego typu. Rozumie twierdzenia interpolacyjne Riesz i Marcinkiewicza.	MAT_K2_W01, MAT_K2_W03, MAT_K2_W04	Egzamin ustny
W2	Zna definicję transformacji Fouriera i splotu funkcji całkowalnych oraz ich podstawowe własności w tym związek między tymi pojęciami. Zna i rozumie lemat Riemanna-Lebesgue'a. Rozumie co to jest aproksymacyjna jedność i regularyzacja oraz jakie jest ich znaczenie dla metod aproksymacyjnych dowodzeniu twierdzeń analizy harmonicznej.	MAT_K2_W01, MAT_K2_W02, MAT_K2_W04	Egzamin ustny
W3	Zna i rozumie definicje przestrzeni Schwartza funkcji szybko malejących i dystrybucji temperowanych. Zna podstawowe operacje na tych dystrybucjach. Wie jak działa transformacja Fouriera w tych przestrzeniach. Zna formułę inwersji dla transformaty Fouriera. Wie i rozumie jak transformacja Fouriera działa w przestrzeniach funkcji całkowalnych z p -tą potęgą. Zna i rozumie twierdzenie Plancherela oraz nierówności Hausdorfa-Younga dla splotu oraz nierówność Hausdorfa dla transformacji Fouriera. .	MAT_K2_W01, MAT_K2_W02, MAT_K2_W03, MAT_K2_W04	Egzamin ustny
W4	Zna pojęcie funkcji maksymalnych. Rozumie ich związek ze zbieżnością prawie wszędzie. Zna twierdzenie Hardy'ego-Littlewooda i twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu.	MAT_K2_W01, MAT_K2_W02, MAT_K2_W04	Egzamin ustny

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
W5	Zna pojęcie transformacji Hilberta oraz jej własności. Rozumie twierdzenia Kołmogorowa i Riesz o tej transformacji. Zna pojęcie mnożników Fouriera i podstawowe własności tych mnożników. Rozumie twierdzenie mnożnikowe Hoermandera i Feffermana. Rozumie znaczenie twierdzeń mnożnikowych dla rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.	MAT_K2_W03, MAT_K2_W04	Egzamin ustny
W6	Wie co to jest singularny operator całkowy i zna podstawowe twierdzenia dotyczące ograniczoności tych operatorów.	MAT_K2_W02, MAT_K2_W03, MAT_K2_W04	Egzamin ustny
Umiejętności - Student/ka:			
U1	Umie wykorzystywać pojęcia zupełności i dualności do rozwiązywania standardowych problemów analizy. Umie sprawdzać czy wybrane operatory są silnego i słabego typu.	MAT_K2_U02, MAT_K2_U09	Projekt
U2	Umie wyznaczyć transformatę Fouriera wybranych funkcji całkowalnych. Umie splatać funkcje całkowalne	MAT_K2_U08, MAT_K2_U09	Projekt
U3	Potrafi dokonywać operacji na funkcjach szybko malejących i dystrybucjach temperowanych w tym wyznaczać transformacje Fouriera wybranych funkcji i dystrybucji, a także różniczkować dystrybucje. Umie dowodzić nierówności wykorzystując własności splotu, twierdzenia Plancherela i nierówności Hausdorfa-Younga.	MAT_K2_U01, MAT_K2_U02, MAT_K2_U09	Projekt
U4	Umie wyznaczyć funkcję maksymalną wybranych funkcji. Potrafi wykazać ograniczoność innych funkcji maksymalnych korzystając z Twierdzenia Hardy'ego-Littlewooda.	MAT_K2_U02, MAT_K2_U07, MAT_K2_U09	Projekt
U5	Potrafi sprawdzać czy wybrane funkcje są mnożnikami Fouriera, posługując się m.in. twierdzeniami Kołmogorowa, Riesz i Hoermandera.	MAT_K2_U02, MAT_K2_U05, MAT_K2_U06, MAT_K2_U07	Projekt
U6	Potrafi sprawdzić ograniczoność wybranych operatorów singularnych.	MAT_K2_U02, MAT_K2_U07, MAT_K2_U09	Projekt

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	1. Przestrzenie funkcji p-całkowalnych L^p na przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej. 2. Zupełność i dualność tych przestrzeni. 3. Operatory liniowe silnego i słabego typu. 4. Twierdzenie interpolacyjne Riesz 5. Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza.	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
2.	1. Definicja transformacji Fouriera funkcji całkowalnych 2. Definicja spłotu funkcji całkowalnych, aproksymacyjna jedność. 3. Regularyzacja i aproksymacja funkcjami ciągłymi i gładkimi. 4. Lemat Riemanna-Lebesgue'a.	W2, U2	Wykład, Ćwiczenia
3.	1. Przestrzeń Schwartza funkcji szybko malejących jej własności 2. Działanie transformacji Fouriera w przestrzeni Schwartza. Twierdzenie o izomorficzności. 3. Definicja dystrybucji temperowanych i transformaty Fouriera tych dystrybucji. 4. Twierdzenie Plancherela 5. Nierówność Hausdorfa dla transformacji Fouriera i Hausdorfa-Younga dla spłotu. 6. Równanie przewodnictwa cieplnego i jego rozwiązanie.	W3, U3	Wykład, Ćwiczenia
4.	1. Splotowa definicja funkcji maksymalnych i ich związek ze zbieżnością prawie wszędzie. 2. Funkcja maksymalna Hardy'ego-Littlewooda i diadyczna funkcja maksymalna. 3. Twierdzenie Hardy'ego-Littlewooda i rozkład Calderona-Zygmunda. 4. Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu.	W4, U4	Wykład, Ćwiczenia
5.	1. Funkcje harmoniczne na górnej półpłaszczyźnie i transformacja Hilberta. 2. Twierdzenie Kołmogorowa 3. Twierdzenie Riesz 4. Definicja mnożników Fouriera i ich podstawowe własności. 5. Przestrzeń Sobolewa i twierdzenie mnożnikowe Hörmandera 6. Funkcje charakterystyczne jako mnożniki Fouriera i twierdzenie mnożnikowe Feffermana.	W5, U5	Wykład, Ćwiczenia
6.	1. Definicja i przykłady singularnych operatorów całkowych. 2. Dowodzenie ograniczoneści metodą obrotów.	W6, U6	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład problemowy
Ćwiczenia	Praca z tekstem, Metoda ćwiczeniowa

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Zdanie egzaminu ustnego, na którym sprawdzane będzie rozumienie użytych pojęć i omawianych na wykładzie twierdzeń. Warunkiem przystąpienia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń. Skala ocen: 1. bardzo dobry (bdb; 5.0) - od 90% całkowitej liczby punktów, 2. dobry plus (db plus; 4,5) - od 80% całkowitej liczby punktów, 3. dobry (db; 4) - od 70% całkowitej liczby punktów, 4. dostateczny plus (dst plus; 3,5) - od 60% całkowitej liczby punktów, 5. dostateczny (dst; 3) - od 50% całkowitej liczby punktów, 6. niedostateczny (ndst; 2) - poniżej 50% całkowitej liczby punktów.
Ćwiczenia	Przygotowanie projektu zawierającego szczegółowe opracowanie wybranego zagadnienia z analizy harmonicznej. Liczba punktów zależna od zawartości merytorycznej i poprawności przygotowanego projektu, ocena według skali 1. bardzo dobry (bdb; 5.0) - od 90% całkowitej liczby punktów, 2. dobry plus (db plus; 4,5) - od 80% całkowitej liczby punktów, 3. dobry (db; 4) - od 70% całkowitej liczby punktów, 4. dostateczny plus (dst plus; 3,5) - od 60% całkowitej liczby punktów, 5. dostateczny (dst; 3) - od 50% całkowitej liczby punktów, 6. niedostateczny (ndst; 2) - poniżej 50% całkowitej liczby punktów.

Literatura

Obowiązkowa

1. Walter Rudin, Analiza Funkcjonalna, PWN

Dodatkowa

1. Javier Duoandikoetxea, Fourier Analysis, AMS Rhode Island 2001
2. Elias Stein, Rami Shakarchi, Fourier Analysis. An introduction, Princeton University Press 2003
3. Elias Stein, Rami Shakarchi, Functional Analysis. Introduction to further topics in analysis, Princeton University Press 2011
4. Thomas H. Wolff, Lectures on Harmonic Analysis AMS Providence Rhode Island 2003
5. Robert Strichartz, A guide to distribution theory and Fourier transforms, CRC Press, Boca Raton 1994

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	30
Ćwiczenia	30
Czytanie wskazanej literatury	40
Przygotowanie pracy pisemnej	35
Przygotowanie do egzaminu	40
Łączny nakład pracy studenta	Liczba godzin 175
Liczba punktów ECTS	ECTS 6

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K2_U01	Absolwent/ka potrafi wyrażać treści matematycznych w mowie i piśmie, w opracowaniach o różnym charakterze, dostosowując precyzję sformułowań i języka do poziomu i potrzeb odbiorcy opracowania
MAT_K2_U02	Absolwent/ka potrafi przeprowadzać rozumowania matematyczne, dowodzenie twierdzeń, jak i weryfikację hipotez drogą doboru odpowiednich przykładów
MAT_K2_U05	Absolwent/ka potrafi analizować nowe zagadnienia, korzystać z literatury matematycznej, baz danych i innych źródeł oraz dokonać krytycznej ich oceny
MAT_K2_U06	Absolwent/ka potrafi odnosić pojęcia matematyczne do niematematycznych kontekstów, w analizowanych problemach potrafi dostrzec i wykorzystać struktury formalne opisywane w wybranych działach matematyki
MAT_K2_U07	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem analizy matematycznej oraz zna jej znaczenie i zastosowanie w poznanych działach matematyki
MAT_K2_U08	Absolwent/ka potrafi rozpoznawać podstawowe struktury algebraiczne i ich własności oraz potrafi wykorzystać działania i przekształcenia algebraiczne w innych działach matematyki
MAT_K2_U09	Absolwent/ka potrafi posługiwać się zaawansowanymi metodami i narzędziami przynajmniej z jednej dziedziny matematyki
MAT_K2_W01	Absolwent/ka zna i rozumie klasyczne pojęcia z zakresu matematyki i jej zastosowań oraz najważniejsze metody i twierdzenia z głównych jej działów
MAT_K2_W02	Absolwent/ka zna i rozumie rolę, znaczenie i zasady poprawnego prowadzenia rozumowań matematycznych oraz zna różne techniki dowodzenia
MAT_K2_W03	Absolwent/ka zna i rozumie podstawy konstruowania modeli matematycznych przydatnych w zastosowaniach matematyki w różnych dziedzinach wiedzy
MAT_K2_W04	Absolwent/ka zna i rozumie specjalistyczne zagadnienia z wybranej dziedziny matematyki