

Multiplikatywna teoria liczb

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka Specjalność - Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki Poziom studiów studia pierwszego stopnia Forma studiów studia stacjonarne Profil studiów profil ogólnoakademicki		Cykl dydaktyczny 2025/26 Kod zajęć 06MATS.1800000PW.03593.25 Języki wykładowe polski Obligatoryjność Fakultatywny Blok zajęciowy Przedmioty do wyboru
Koordynator zajęć	Łukasz Pańkowski	
Prowadzący zajęcia	Łukasz Pańkowski	
Okres Przedmioty do wyboru - semestr letni	Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia • Wykład: 30, Egzamin • Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną	Liczba punktów ECTS 5

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem przedmiotu jest zapoznanie studentów z podstawami multiplikatywnej teorii liczb tj. zagadnieniami związanymi z liczbami pierwszymi, ich rozmieszczeniem oraz rozkładem liczb naturalnych na czynniki. Centralnym punktem wykładu będą funkcje multiplikatywne, które są efektywnym narzędziem do badania arytmetyki liczb naturalnych.
C2	Prezentowane zostaną różne metody pozwalające uzyskać oszacowania oraz wzory asymptotyczne dotyczące funkcji multiplikatywnych i ich wartości średnich. Wyniki te zostaną zastosowane do uzyskania pewnych informacji dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych.

Wymagania wstępne

Znajomość podstawowych pojęć teorii liczb, algebry i analizy matematycznej, w zakresie objętym kursami: „Wstęp do algebry i teorii liczb” oraz „Wstęp do analizy matematycznej” i „Analiza matematyczna: rachunek różniczkowy i całkowy”.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy - Student/ka:			
W1	zna różne dowody nieskończoności zbioru liczb pierwszych, w szczególności te oparte na wynikach z analizy matematycznej.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
W2	zna i rozumie podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące funkcji arytmetycznych. Zna własności i rozumie istotę splotu Dirichleta. Zna podstawowe związki między funkcjami arytmetycznymi, w tym formułę odwrotną Möbiusa. Zna podstawowe własności i przykłady funkcji multiplikatywnych.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
W3	zna metodę sumowania przez części oraz formułę sumacyjną Eulera-Maclaurina.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
W4	zna twierdzenie Czebyszewa oraz jego zastosowania. Zna twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych.	MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
W5	zna metody analizy rzeczywistej, które można wykorzystać do badania rozmieszczenia liczb pierwszych oraz wykazania innych ważnych wyników dotyczących arytmetyki liczb całkowitych.	MAT_K1_W01, MAT_K1_W02, MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
Umiejętności - Student/ka:			
U1	potrafi wykorzystać podstawowe zagadnienia teorii liczb, algebry i analizy matematycznej do udowodnienia prostych własności dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych, w szczególności do udowodnienia nieskończoności zbioru liczb pierwszych oraz wykorzystać te rozumowania do uzyskania prostych oszacowań liczby liczb pierwszych	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04, MAT_K1_U06, MAT_K1_U08, MAT_K1_U10	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
U2	potrafi podać liczne przykłady funkcji arytmetycznych. Umie dokonać splotu Dirichleta dwóch funkcji arytmetycznych oraz wyznaczyć element odwrotny względem splotu Dirichleta.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04, MAT_K1_U06, MAT_K1_U10	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
U3	potrafi wykorzystać podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa do oszacowania wartości średnich pewnych funkcji arytmetycznych, w szczególności umie zastosować metodę sumowania przez części oraz formułę sumacyjną Eulera-Maclaurina. Potrafi wyprowadzić wzór Stirlinga.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04, MAT_K1_U06, MAT_K1_U08, MAT_K1_U10	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U4	rozumie twierdzenie Czebyszewa oraz potrafi go zastosować do innych problemów. Potrafi udowodnić postulat Bertranda. Rozumie znaczenie twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych oraz potrafi wykorzystać wyniki z analizy funkcji rzeczywistych do ich udowodnienia.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04, MAT_K1_U06, MAT_K1_U08, MAT_K1_U10	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
U5	potrafi wykorzystać metody analizy rzeczywistej do odpowiedzi na pytania dotyczące arytmetyki liczb naturalnych, w szczególności rozmieszczenia liczb pierwszych.	MAT_K1_U01, MAT_K1_U02, MAT_K1_U03, MAT_K1_U04, MAT_K1_U06, MAT_K1_U08, MAT_K1_U10	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne
Kompetencji społecznych - Student/ka:			
K1	jest gotów/gotowa do samodzielnego studiowania teorii liczb na zaawansowanym poziomie.	MAT_K1_K01, MAT_K1_K02, MAT_K1_K03, MAT_K1_K04	Egzamin ustny, Egzamin z "otwartą książką", Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Asymptotyczne tempo wzrostu funkcji, notacja dużego O, małego o oraz symbole Winogradowa. Zastosowanie tych pojęć do porównywania asymptotyki dwóch funkcji.	W1, W2, W3, W4, W5, U1, U2, U3, U4, U5, K1	Wykład, Ćwiczenia
2.	Twierdzenie o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych oraz liczne dowody tego faktu wykorzystujące różne własności z teorii liczb, algebry i analizy matematycznej. W szczególności, dowód Eulera wykorzystujący rozbieżność szeregu harmonicznego. Dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych. Zastosowanie tych rozumowań do uzyskania prostych oszacowań na liczbę liczb pierwszych	W1, U1, K1	Wykład, Ćwiczenia
3.	Podstawowe metody sita, w szczególności sito Legendre'a oraz wykorzystanie zasady włączania-wyłączania i podstawowych własności funkcji Möbiusa do oszacowania liczby liczb pierwszych i liczby liczb bezkwadratowych.	W2, W5, U5, K1	Wykład, Ćwiczenia
4.	Definicja i przykłady funkcji arytmetycznych. Definicja i własności splotu Dirichleta. Wyznaczanie elementów odwracalnych względem splotu Dirichleta. Formuła odwrotna Möbiusa. Definicja i podstawowe własności funkcji von Mangoldta i jej związek funkcją logarytmiczną.	W2, U2, K1	Wykład

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
5.	Definicja i przykłady funkcji multiplikatywnych. Twierdzenie o multiplikatywności spłotu dwóch funkcji multiplikatywnych oraz odwrotności względem spłotu funkcji multiplikatywnej. Zastosowanie tych własności do wyprowadzania wzorów ogólnych dla pewnych funkcji multiplikatywnych.	W2, U2, K1	Wykład, Ćwiczenia
6.	Podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa oraz ich zastosowanie do wyprowadzenia wzoru na sumowanie przez części. Sumowanie Abela. Zastosowanie sumowania przez części do pokazania związku między liczbą liczb pierwszych oraz funkcjami theta i psi Czebyszewa.	W3, W5, U3, U5, K1	Wykład, Ćwiczenia
7.	Definicja i podstawowe własności wielomianów i liczb Bernoulliego. Formuła sumacyjna Eulera-Maclaurina oraz jej zastosowanie do wyprowadzenia wzoru asymptotycznego dla sumy częściowej szeregu harmonicznego oraz wzoru Stirlinga.	W3, W5, U3, U5, K1	Wykład, Ćwiczenia
8.	Twierdzenie Czebyszewa dotyczące asymptotyki liczby liczb pierwszych. Omówienie optymalizacji stałych pojawiających się w twierdzeniu Czebyszewa. Postulat Bertranda. Twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych oraz ich wybrane zastosowania.	W4, W5, U4, U5, K1	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień, Wykład konwersatoryjny, Dyskusja
Ćwiczenia	Rozwiązywanie zadań (np.: obliczeniowych, artystycznych, praktycznych), Metoda ćwiczeniowa

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Zdanie egzaminu ustnego oraz zaliczenie części ćwiczeniowej. Skala ocen jest następująca: • bardzo dobry (bdb; 5,0) - powyżej 90% punktów • dobry plus (+db; 4,5) - powyżej 80% punktów • dobry (db; 4,0) - powyżej 70% punktów • dostateczny plus (+dst; 3,5) - powyżej 60% punktów • dostateczny (dst; 3,0) - powyżej 50% punktów • niedostateczny (ndst; 2,0) - 50% punktów lub mniej
Ćwiczenia	Zdobycie co najmniej 50% możliwych punktów z kolokwium pisemnego. Skala ocen jest następująca: • bardzo dobry (bdb; 5,0) - powyżej 90% punktów • dobry plus (+db; 4,5) - powyżej 80% punktów • dobry (db; 4,0) - powyżej 70% punktów • dostateczny plus (+dst; 3,5) - powyżej 60% punktów • dostateczny (dst; 3,0) - powyżej 50% punktów • niedostateczny (ndst; 2,0) - 50% punktów lub mniej

Literatura

Obowiązkowa

1. T.M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1976.
2. H.L. Montgomery, R.C. Vaughan, Multiplicative Number Theory I: Classical Theory, Cambridge University Press, 2006.
3. W. Narkiewicz, Teoria liczb, 3 wydanie, Wyd. Nauk. PWN, 2003.

Dodatkowa

1. W. Narkiewicz, The Development of Prime Number Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
2. M.B. Nathanson, Elementary Methods in Number Theory, Graduate Texts in Mathematics 195, Springer-Verlag New York, 2000.

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	30
Ćwiczenia	30
Czytanie wskazanej literatury	30
Przygotowanie do zajęć	30
Przygotowanie do egzaminu	15
Przygotowanie do zaliczenia	15
Łączny nakład pracy studenta	Liczba godzin 150
Liczba punktów ECTS	ECTS 5

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K1_K01	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do uznania ograniczenia własnej wiedzy i umiejętności i zrozumienia potrzeby dalszego kształcenia, w tym do samodzielnego stawiania pytań, wyszukiwania informacji i ich krytycznej analizy
MAT_K1_K02	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do pracy zespołowej, a w swoich działaniach wykazuje się przedsiębiorczością i dbałością o interes społeczny
MAT_K1_K03	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do samodzielnego formułowania opinii na temat zagadnień, w których matematyka odgrywa istotną rolę, oraz wyjaśniania ich konsekwencje osobom niezwiązanym z tą dziedziną
MAT_K1_K04	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do zrozumienia i docenienia uczciwości intelektualnej i zasad etyki zawodowej
MAT_K1_U01	Absolwent/ka potrafi posługiwać się formalizmem matematycznym przy definiowaniu pojęć, formułowaniu twierdzeń i budowie prostych modeli matematycznych
MAT_K1_U02	Absolwent/ka potrafi konstruować logiczną argumentację z klarowną identyfikacją założeń i konkluzji oraz wykazać się biegłością w zakresie różnych metod prowadzenia dowodu matematycznego
MAT_K1_U03	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem analizy matematycznej oraz stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U04	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem algebry liniowej oraz abstrakcyjnej i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U06	Absolwent/ka potrafi posługiwać się pojęciami i twierdzeniami rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej oraz matematyki dyskretniej i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U08	Absolwent/ka potrafi rozpoznawać i rozwiązywać problemy, w tym zagadnienia praktyczne, które można rozstrzygnąć z użyciem narzędzi matematycznych
MAT_K1_U10	Absolwent/ka potrafi pracować indywidualnie oraz w zespole nad projektami
MAT_K1_W01	Absolwent/ka zna i rozumie cywilizacyjne znaczenie matematyki i jej zastosowań
MAT_K1_W02	Absolwent/ka zna i rozumie teorie matematyczne w stopniu umożliwiającym stosowanie formalizmu matematycznego do rozwiązywania problemów z różnych obszarów wiedzy
MAT_K1_W03	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, metody i twierdzenia logiki matematycznej oraz teorii mnogości
MAT_K1_W05	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia algebry abstrakcyjnej i liniowej oraz geometrii