

## Algebra liniowa 1

### Sylabus zajęć

#### Informacje podstawowe

|                                                                    |                                                                                                                                                                     |                                                |                                 |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|
| <b>Kierunek studiów</b><br>Matematyka                              |                                                                                                                                                                     | <b>Cykl dydaktyczny</b><br>2024/25             |                                 |
| <b>Specjalność</b><br>-                                            |                                                                                                                                                                     | <b>Kod zajęć</b><br>06MATS.11K.03579.24        |                                 |
| <b>Jednostka organizacyjna</b><br>Wydział Matematyki i Informatyki |                                                                                                                                                                     | <b>Języki wykładowe</b><br>polski              |                                 |
| <b>Poziom studiów</b><br>studia pierwszego stopnia                 |                                                                                                                                                                     | <b>Obligatoryjność</b><br>Obowiązkowy          |                                 |
| <b>Forma studiów</b><br>studia stacjonarne                         |                                                                                                                                                                     | <b>Blok zajęciowy</b><br>Przedmioty kierunkowe |                                 |
| <b>Profil studiów</b><br>profil ogólnoakademicki                   |                                                                                                                                                                     |                                                |                                 |
| <b>Koordynator zajęć</b>                                           | Dorota Blinkiewicz                                                                                                                                                  |                                                |                                 |
| <b>Prowadzący zajęcia</b>                                          | Dorota Blinkiewicz                                                                                                                                                  |                                                |                                 |
| <b>Okres</b><br>Semestr 1                                          | <b>Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Wykład: 30, Egzamin</li><li>Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną</li></ul> |                                                | <b>Liczba punktów ECTS</b><br>5 |

## Cele kształcenia dla zajęć

| Kod | Cel                                                                                                             |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| C1  | przekazanie wiedzy z zakresu rozwiązywania dowolnych układów równań liniowych                                   |
| C2  | zapoznanie studentów z rachunkiem na macierzach, algorytmami odwracania macierzy oraz powiązanymi zagadnieniami |
| C3  | zapoznanie studentów z pojęciem wyznacznika macierzy i jego zastosowaniem                                       |
| C4  | zapoznanie studentów z pojęciem przestrzeni liniowych nad dowolnym ciałem oraz powiązanymi zagadnieniami        |
| C5  | zapoznanie studentów z pojęciem przekształcenia liniowego oraz powiązanymi zagadnieniami                        |

## Wymagania wstępne

- znajomość zagadnień matematycznych na poziomie matury rozszerzonej z matematyki.

## Efekty uczenia się dla zajęć

| Kod                               | Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie                                                                                                                                                            | Efekty uczenia się dla kierunku                         | Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <b>Wiedzy - Student/ka:</b>       |                                                                                                                                                                                                    |                                                         |                                                              |
| W1                                | zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia algebry liniowej                                                                                                                                    | MAT_K1_W01,<br>MAT_K1_W02,<br>MAT_K1_W03,<br>MAT_K1_W04 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| <b>Umiejętności - Student/ka:</b> |                                                                                                                                                                                                    |                                                         |                                                              |
| U1                                | potrafi rozwiązywać dowolne układy równań liniowych oraz określić rząd danej macierzy, znaleźć postacie zredukowane                                                                                | MAT_K1_U02,<br>MAT_K1_U06,<br>MAT_K1_U10,<br>MAT_K1_U16 | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U2                                | potrafi wykonywać operacje na macierzach, znajdować macierz odwrotną za pomocą różnych metod, obliczać wyznacznik macierzy kwadratowych                                                            | MAT_K1_U06,<br>MAT_K1_U10                               | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U3                                | potrafi badać liniową zależność wektorów, znajdować bazy i wymiary przestrzeni liniowych, znajdować macierz przejścia od bazy do bazy, itp.                                                        | MAT_K1_U02,<br>MAT_K1_U10                               | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U4                                | potrafi rozróżniać struktury algebraiczne; określić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią liniową danej przestrzeni liniowej, czy suma algebraiczna podprzestrzeni liniowych jest sumą prostą, itp. | MAT_K1_U05,<br>MAT_K1_U10                               | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |
| U5                                | potrafi dowodzić i formułować podstawowe fakty i twierdzenia algebry liniowej oraz formułować podstawowe definicje algebry liniowej                                                                | MAT_K1_U01,<br>MAT_K1_U02,<br>MAT_K1_U03                | Egzamin pisemny,<br>Kolokwium pisemne                        |

## Treści programowe dla zajęć

| Lp. | Treści programowe dla zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Efekty uczenia się dla zajęć | Formy zajęć       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 1.  | Struktury algebraiczne. Arytmetyka w różnych ciałach. Macierz o m wierszach n kolumnach i elementach/współczynnikach z dowolnego ciała. Postać zredukowana i całkowicie zredukowana macierzy. Rząd macierzy. Układ równań liniowych o współczynnikach z dowolnego ciała. Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań. Twierdzenie Kroneckera-Capellego.                                         | W1, U1, U4, U5               | Wykład, Ćwiczenia |
| 2.  | Operacje dodawania macierzy, mnożenia macierzy przez skalar oraz mnożenia macierzy. Macierz transponowana i hermitowsko-sprzężona. Własności działań. Ślad macierzy. Macierze elementarne. Macierz odwrotna, odwracalna, osobliwa, nieosobliwa. Algorytm odwracania macierzy za pomocą operacji elementarnych.                                                                                                    | W1, U2, U5                   | Wykład, Ćwiczenia |
| 3.  | Wyznacznik macierzy kwadratowej. Własności wyznacznika; twierdzenie Laplace'a, wzór Sarrusa; twierdzenie Cauchy'ego. n-ta grupa liniowa, n-ta specjalna grupa liniowa, n-ta grupa ortogonalna, itd. Macierz dołączona oraz wzór na macierz odwrotną wykorzystujący wyznacznik i macierz dołączoną. Minor macierzy, minor obejmujący. Metoda minorów obejmujących (dot. obliczania rzędu macierzy). Wzory Cramera. | W1, U2, U5                   | Wykład, Ćwiczenia |
| 4.  | Przestrzeń liniowa i podprzestrzeń liniowa. Układ wektorów oraz kombinacja liniowa układu wektorów. Powłoka liniowa układu wektorów. Liniowa niezależność oraz liniowa zależność układu wektorów. Baza i wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne wektora względem bazy. Twierdzenie Steinitza o wymianie. Suma prosta i algebraiczna podprzestrzeni liniowych. Macierz przejścia od bazy do bazy.                | W1, U3, U4, U5               | Wykład, Ćwiczenia |
| 5.  | Przekształcenie liniowe, funkcjonal liniowy oraz przestrzeń dualna. Monomorfizm, epimorfizm i izomorfizm przestrzeni liniowych oraz automorfizm i endomorfizm/operator liniowy przestrzeni liniowej. Własności przekształcenia liniowego.                                                                                                                                                                         | W1, U5                       | Wykład, Ćwiczenia |

### Informacje dodatkowe

| Forma zajęć | Metody i formy prowadzenia zajęć                                                                                                                                                                                                               |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wykład      | Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień, Wykład konwersatoryjny, Wykład problemowy, Dyskusja                                                                                                                                    |
| Ćwiczenia   | Dyskusja, Metoda analizy przypadków, Rozwiązywanie zadań (np.: obliczeniowych, artystycznych, praktycznych), Metoda badawcza (dociekania naukowego), Metoda aktywizująca - "burza mózgów", Praca w grupach, Rozwiązywanie zadań obliczeniowych |

| Forma zajęć | Warunki zaliczenia zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wykład      | <p>W sesji egzaminacyjnej odbędzie się egzamin pisemny.</p> <p>Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń, tj. uzyskanie co najmniej oceny dostateczny (3,0).</p> <p>Obowiązuje następująca skala ocen:</p> <p>bardzo dobry (bdb; 5,0): powyżej 90% punktów możliwych do uzyskania;</p> <p>dobry plus (+db; 4,5): powyżej 80% punktów możliwych do uzyskania;</p> <p>dobry (db; 4,0): powyżej 70% punktów możliwych do uzyskania;</p> <p>dostateczny plus (+dst; 3,5): powyżej 60% punktów możliwych do uzyskania;</p> <p>dostateczny (dst; 3,0): powyżej 50% punktów możliwych do uzyskania;</p> <p>niedostateczny (ndst; 2,0): 50% punktów możliwych do uzyskania lub mniej.</p>                                                                                                                                                                                                                                          |
| Ćwiczenia   | <p>Obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa.</p> <p>W trakcie semestru odbędą się dwa kolokwia, za każde będzie można zdobyć 100 punktów maksymalnie. Nieusprawiedliwienie nieobecności na kolokwium skutkuje otrzymaniem za nie zera punktów.</p> <p>Prowadzący może nagradzać studentów punktami za aktywność, które będą na końcu doliczane do otrzymanych punktów z kolokwiów.</p> <p>O ocenie końcowej zadecyduje suma zdobytych punktów wg następującej skali:</p> <p>bardzo dobry (bdb; 5,0): powyżej 180 (90%) punktów;</p> <p>dobry plus (+db; 4,5): powyżej 160 (80%) punktów;</p> <p>dobry (db; 4,0): powyżej 140 (70%) punktów;</p> <p>dostateczny plus (+dst; 3,5): powyżej 120 (60%) punktów;</p> <p>dostateczny (dst; 3,0): powyżej 100 (50%) punktów;</p> <p>niedostateczny (ndst; 2,0): 100 (50%) punktów lub mniej.</p> <p>Jeśli student nie zaliczy ćwiczeń, to na końcu semestru odbędzie się kolokwium poprawkowe.</p> |

## Literatura

### Obowiązkowa

1. G. Banaszak, W. Gajda, Elementy Algebry Liniowej cz.1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne (2002)
2. G. Banaszak, W. Gajda, Elementy Algebry Liniowej cz.2, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne (2002)
3. J. Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN (2008 lub inne wydania)

### Dodatkowa

1. William A. Adkins, Steven H. Weintraub, Algebra: An Approach Via Module Theory, GTM 136, Springer (1992, 1999)
2. Aleksiej I. Kostrikin, Wstęp do algebry 2, Algebra liniowa, Wydawnictwo Naukowe PWN (2004, 2021)
3. Aleksiej I. Kostrikin, Zbiór zadań z algebry, Wydawnictwo Naukowe PWN (2005, 2020)

## Nakład pracy studenta i punkty ECTS

| Rodzaje zajęć studenta        | Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Wykład                        | 30                                                                  |
| Ćwiczenia                     | 30                                                                  |
| Przygotowanie do zajęć        | 30                                                                  |
| Czytanie wskazanej literatury | 30                                                                  |
| Przygotowanie do zaliczenia   | 15                                                                  |
| Przygotowanie do egzaminu     | 15                                                                  |

|                                     |                             |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| <b>Łączny nakład pracy studenta</b> | <b>Liczba godzin</b><br>150 |
| <b>Liczba punktów ECTS</b>          | <b>ECTS</b><br>5            |

\* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

## Efekty uczenia się dla kierunku

| Kod        | Treść                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MAT_K1_U01 | Absolwent/ka potrafi przedstawiać treści matematyczne w mowie i w piśmie, formułować twierdzenia i definicje                                                                                                                                |
| MAT_K1_U02 | Absolwent/ka potrafi objaśniać, interpretować złożone wypowiedzi z użyciem matematycznej notacji i języka oraz formułować problemy w postaci symbolicznej, ułatwiającej ich analizę i rozwiązanie                                           |
| MAT_K1_U03 | Absolwent/ka potrafi konstruować logiczną argumentację z klarowną identyfikacją założeń i konkluzji oraz wykazać się biegłością w zakresie różnych metod prowadzenia dowodu matematycznego                                                  |
| MAT_K1_U05 | Absolwent/ka potrafi tworzyć nowe obiekty drogą standardowych konstrukcji, zwłaszcza przestrzeni ilorazowych i produktów kartezjańskich                                                                                                     |
| MAT_K1_U06 | Absolwent/ka potrafi operować pojęciem liczby, zwłaszcza rzeczywistej i zespolonej, arytmetyką liczb całkowitych oraz rozwiązywać podstawowe typy równań algebraicznych w różnych zbiorach liczb                                            |
| MAT_K1_U10 | Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem teorii liczb, algebry liniowej i abstrakcyjnej, z uwzględnieniem klasycznych struktur algebraicznych, takich jak grupy, pierścienie i ciała, oraz geometrii i topologii          |
| MAT_K1_U16 | Absolwent/ka potrafi modelować w języku matematycznym i rozwiązywać proste problemy praktyczne                                                                                                                                              |
| MAT_K1_W01 | Absolwent/ka zna i rozumie cywilizacyjne znaczenie matematyki i jej zastosowań                                                                                                                                                              |
| MAT_K1_W02 | Absolwent/ka zna i rozumie rolę i znaczenie dowodu w matematyce, a także istotność założeń                                                                                                                                                  |
| MAT_K1_W03 | Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły, twierdzenia i algorytmy z działów matematyki objętych programem studiów                                                                                                              |
| MAT_K1_W04 | Absolwent/ka zna i rozumie teorie matematyczne w zakresie wystarczającym do poprawnego stosowania formalizmu matematycznego w tworzeniu i analizie prostych modeli matematycznych w różnych działach matematyki i innych dziedzinach wiedzy |