Analiza matematyczna: rachunek różniczkowy i całkowy

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka **Specjalność** - **Jednostka organizacyjna** Wydział Matematyki i Informatyki **Poziom studiów** studia pierwszego stopnia **Forma studiów** studia stacjonarne **Profil studiów** profil ogólnoakademicki	**Cykl dydaktyczny** 2026/27 **Kod zajęć** 06MATS.12.16777.26 **Języki wykładowe** polski **Obligatoryjność** Obowiązkowy **Blok zajęciowy** Przedmioty podstawowe

Koordynator zajęć	Tomasz Kubiak
Prowadzący zajęcia	

Okres	**Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia**	**Liczba punktów ECTS**
Semestr 2	• Wykład: 60, Egzamin • Ćwiczenia: 60, Zaliczenie z oceną	10

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Naszym celem jest porządnie nauczyć się rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej.

Wymagania wstępne

Ocena pozytywna z przedmiotu: Wstęp do analizy matematycznej.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy – Student/ka:			
W1	Wie, że pochodna jest granicą ilorazu różnicowego i że granice takich ilorazów obliczane były już w semestrze pierwszym. Zna reguły różniczkowania. Rozumie, że różniczkowalność jest własnością silniejszą niż ciągłość. Zna pojęcie funkcji pochodnej i wie, że ta funkcja ma zawsze własność Darboux, mimo że nie musi być ciągła. Rozumie znaczenie twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, bo wie, że nie dotyczy ono jedynie funkcji na odcinku, ale też funkcji, którą można obciąć do odcinka. Czyli rozumie fundamentalność twierdzenia Lagrange'a, dzięki któremu może badać tzw. przebieg zmienności funkcji. Zna pochodne wyższych rzędów. Zna wzór Taylora (zwłaszcza z resztą Lagrange'a) i rozumie, że wzór Taylora rzędu 1 to twierdzenie Lagrange'a. Sprawdza istnienie ekstremum za pomocą pochodnych wyższego rzędu.	MAT_K1_W03, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W2	Wie, że całka Riemanna jest potężnym narzędziem. I wie, że nie służy tylko do obliczania długości, pól i objętości rozmaitych tworów geometrycznych. Całka Riemanna wprowadza też nowy sposób definiowania funkcji o wzorze F(x) za pomocą całki z funkcji f na odcinku [a,x]. Dlatego rozumie, dlaczego twierdzenie mówiące o tym własnościach nazwano zasadniczym twierdzeniem rachunku całkowego.	MAT_K1_W03, MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W3	Wie, że ciągi sum, np. 1+1/(1!) +...+1/(n!), były już w semestrze pierwszym. Teraz otrzymały nową nazwę: są sumami częściowymi szeregów. Zna rozmaite kryteria zbieżności takich sum, czyli zbieżności szeregów. W typowych przypadkach rozpoznaje, którego kryterium należy użyć.	MAT_K1_W03, MAT_K1_W04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W4	Dzięki ciągom i szeregom funkcyjnym dowiaduje się, jak pojęcia analizy matematycznej ewoluują. Dowiaduje się, że nie tylko ciąg liczb może być zbieżny do liczby, ale że ciąg funkcji też może być zbieżny do funkcji. Może zada sobie pytanie co jeszcze może być zbieżne i do czego? Dowie się, że znowu pojawiła się odległość. Nie odległość punktów na prostej lub płaszczyźnie, ale odległość jednej funkcji od drugiej. Może zada sobie pytanie pomiędzy jakimi innymi jeszcze obiektami można by określić odległość?	MAT_K1_W03, MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W5	Wie, że wielomiany są najbardziej naturalnymi funkcjami. Teraz dowie się, że inne porządne funkcje, które wielomianami nie są, mogą być jednak zapisane w postaci "nieskończenie długiego wielomianu", czyli szeregu potęgowego.	MAT_K1_W03, MAT_K1_W04, MAT_K1_W05	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
Umiejętności – Student/ka:			

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U1	Bezbłędnie oblicza pochodne funkcji elementarnych i rozumie, że to jest konieczne. Dla stosownie dobranych wzorów f(x) umie pochodną f′(x) doprowadzić do postaci, która pozwoli na rozwiązanie równania f′(x) = 0 i nierówności f′(x) > 0. Wie, co trzeba zrobić, by pokazać, że jakaś funkcja nie ma pochodnej w jakimś punkcie. Za pomocą pochodnych umie badać monotoniczność i znajdować ekstrema stosownie dobranych funkcji. Za pomocą twierdzenia Lagrange'a umie dowodzić pewnych nierówności, a także sprawdzać, czy niektóre funkcje są funkcjami Lipschitza. Umie napisać wzór Maclaurina niskiego rzędu dla dowolnej funkcji elementarnej na odcinku [0,x].	MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U2	Umie znajdować funkcje pierwotne typowych funkcji. Jeśli zna całkę nieoznaczoną z f(x), to całkę z f(ax+b) musi umieć zapisać bez żadnego podstawiania. To samo dotyczy całki nieoznaczonej z ilorazu f'(x)/f(x). Umie stosować wzór Newtona-Leibniza. Umie stosować rachunek całkowy w geometrii w stosownym dla drugiego semestru zakresie. Za pomocą poznanych rozwinięć funkcji w szeregi potęgowe umie rozwijać inne funkcje w szereg potęgowy. Umie obliczać wartości niektórych całek niewłaściwych.	MAT_K1_U03, MAT_K1_U04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Różniczkowanie • Pochodna funkcji w punkcie • Różniczkowalność implikuje ciągłość • Liniowość różniczkowania • Pochodna funkcji złożonej • Pochodna funkcji odwrotnej • Pochodne funkcji elementarnych • Twierdzenie Rolle'a • Twierdzenie Lagrange'a • Twierdzenie Cauchy'ego • Monotoniczność funkcji różniczkowalnych • Warunek Lipschitza a ograniczoność f′(x) • Pochodne wyższych rzędów • Wzór Taylora • Wzór Maclaurina • Ekstrema funkcji różniczkowalnych • Warunek konieczny do ekstremum • Trzy warunki dostateczne do ekstremum • Niektóre reguły de l'Hospitala • Wypukłość funkcji różniczkowalnych	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
2.	Funkcje pierwotne • Pojęcie funkcji pierwotnej • Funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne • Symbol ∫f(x)dx • Liniowość całki nieoznaczonej • Całkowanie przez części • Wzory rekurencyjne • Całkowanie przez podstawienie • Całkownie funkcji wymiernych • Całkowanie funkci trygonometrycznych • Całkowanie funkcji niewymiernych • Podstawienia Eulera	W2, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia
3.	Całka Riemanna • Sumy Darboux i ich własności • Całka Riemanna • Własności sum Darboux • Kryterium całkowalności • Całkowalność funkcji ciągłych • Całkowalność funkcji monotonicznych • Liniwość całki Riemana • Całkowalność iloczynu i modułu funkcji • Monotoniczność całki • Całka jako addytywna funkcja przedziału • Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego • Wzór Newtona-Leibniza • Całka Riemanna w geometrii	W2, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia
4.	Szeregi liczbowe • Co to jest szereg liczbowy • Warunki jego zbieżności • Szereg geometryczny • Działania na szeregach liczbowych • Szeregi o wyrazach nieujemnych • Kryterium porównawcze • Zasada zagęszczania Cauchy'ego • Kryterium pierwiastkowe • Kryterium ilorazowe • Szeregi o wyrazach dowolnych • Kryteria Dirichleta, Abela i Leibniza • Zbieżność bezwzględna i warunkowa • Mnożenie szeregów • Twierdzenie Mertensa	W3	Wykład, Ćwiczenia
5.	Ciągi i szeregi funkcyjne • Zbieżność punktowa ciągu funkcji • Supremalna odległość funkcji • Zbieżność jednostajna ciągu funkcji • Własności algebraiczne tej zbieżności • Zbieżność jednostajna zachowuje ciągłość • Zbieżność jednostajna zachowuje całkowlaność • Całka komutuje z granicą jednostajną • Zbieżność jednostajna a różniczkowalność • Szereg funkcyjny • Jego zbieżność punktowa i jednostajna • Kryterium Weierstrassa zbieżności jednost. • Ciągłość, całkowalność i różniczkowalność granicy jednostajnej • Definiowanie funkcji szeregiem funkcyjnym • Funkcja ciągła na R nigdzie nieróżniczkowalna	W4, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
6.	Szeregi potęgowe • Szereg potęgowy i promień zbieżności • Wzór Cauchy-Hadamarda • Gdzie szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie • Funkcje definiowane szergiem potęgowym • Zbieżność na końcach przedziału zbieżności • Funkcja z C^{∞} nierozwijalna w szereg potęgowy • Szereg Maclaurina funkcji z C^{∞} • Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy	W5, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia
7.	Całki niewłaściwe • Dwa rodzaje całek niewłaściwych • Kryteria Cauchy'ego ich zbieżności • Lryterium porównwcze • Kryterium Dirichleta • Warunkowa zbieżność całki • Całkowe kryterium zbieżności szeregów liczbowych	W2, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład problemowy
Ćwiczenia	Praca z tekstem

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Zdanie egzaminu pisemnego. Oceny: 3 [51-60 %], 3+ [61-70 %], 4 [71-80 %[, 4+ [81-90 %], 5 [91-100 %].
Ćwiczenia	Zaliczenie na podstawie sprawdzianów pisemnych. Skala ocen: • dst: (51–60 %), • dst+: (61–70 %), • db: (71–80 %), • db+: (81–90 %), • bdb: (91–100 %).

Literatura

Obowiązkowa

1. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część I, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2009.
2. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część II, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2004.
3. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna, Tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.

Dodatkowa

1. F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
2. J. Mikusiński, Wstęp do analizy matematycznej, PWN, Warszawa 1990.
3. J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT, Warszawa 2006.

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	**Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć**
Wykład	60
Ćwiczenia	60
Przygotowanie do zajęć	45
Przygotowanie do egzaminu	50
Przygotowanie do zaliczenia	50
Łączny nakład pracy studenta	**Liczba godzin** 265
Liczba punktów ECTS	**ECTS** 10

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K1_U03	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem analizy matematycznej oraz stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_U04	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem algebry liniowej oraz abstrakcyjnej i stosować je w różnych działach matematyki i innych obszarach wiedzy
MAT_K1_W03	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, metody i twierdzenia logiki matematycznej oraz teorii mnogości
MAT_K1_W04	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia analizy matematycznej oraz podstawy teorii równań różniczkowych
MAT_K1_W05	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia, reguły i twierdzenia algebry abstrakcyjnej i liniowej oraz geometrii