Transformata Laplace'a i jej zastosowania

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Matematyka **Specjalność** - **Jednostka organizacyjna** Wydział Matematyki i Informatyki **Poziom studiów** studia drugiego stopnia **Forma studiów** studia stacjonarne **Profil studiów** profil ogólnoakademicki	**Cykl dydaktyczny** 2023/24 **Kod zajęć** 06MATS.22K.11708.23 **Języki wykładowe** polski **Obligatoryjność** Fakultatywny **Blok zajęciowy** Przedmioty kierunkowe

Koordynator zajęć	Sebastian Król
Prowadzący zajęcia	Sebastian Król

Okres	**Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia**	**Liczba punktów ECTS**
Semestr 2	• Wykład: 30, Egzamin • Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną	6

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem wykładu jest przedstawienie podstaw teorii transformaty Laplace’a funkcji wektorowo-wartościowych i jej powiązania z wybranymi zagadnieniami teorii półgrup operatorowych (m.in., z twierdzeniami o generowaniu, czy stabilności rozwiązań abstrakcyjnych problemów Cauchy’ego pierwszego rzędu). Teoria półgrup operatorowych dostarcza główne narzędzia do badania abstrakcyjnych równań ewolucyjnych stanowiących matematyczny model szerokiej klasy równań różniczkowych cząstkowych opisujących dynamikę procesów fizycznych (związanych, na przykład, z elastycznością materiałów, czy termodynamiką). Pomimo, że jest ona przypisana do analizy funkcjonalnej stosowanej, swoje badania opiera na synergii metod i narzędzi wielu, z pozoru odległych, działów matematyki. Celem wykładu będzie również podkreślenie znaczenia współdziałania różnych metod i technik szeroko pojętej analizy w badaniach złożonych problemów matematycznych w celu wypracowania innowacyjnych rozwiązań takich problemów. Powiązanie łączące powyżej wspomniane teorie, które wyznacza szczegółowe cele wykładu, można wyrazić następująco: rozwiązanie dobrze postawionego zagadnienia Cauchy’ego u’(t) = Au(t), u(0)=x, w danej przestrzeni Banacha X z wartością początkową x, jest odwrotną transformatą Laplace'a rezolwenty operatora A ewaluowaną w punkcie x. Z drugiej strony, takie zagadnienie Cauchy’ego jest dobrze postawione wtedy i tylko wtedy, gdy operator A jest generatorem półgrupy operatorowej. W zastosowaniach operator A jest odpowiednią realizacją operatora różniczkowego w danej przestrzeni funkcyjnej X. W związku z tym, aby znaleźć rozwiązania takich zagadnień Cauchy’ego, niezbędne jest scharakteryzowanie funkcji będących transformacjami Laplace'a rezolwent operatorów liniowych. To z kolei prowadzi do tak zwanych twierdzeń o reprezentacji dla transformaty Laplace’a. Z punktu widzenia równań ewolucyjnych, takie charakteryzacje równoważne są twierdzeniom o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnień Cauchy’ego. Co więcej, reprezentacje te często dostarczają dodatkowych informacji o zachowaniu asymptotycznym, czy też o analitycznej regularności rozwiązań danego zagadnienia. Celem wykładu będzie przedstawienie ważniejszych twierdzeń o reprezentacji, m.in. reprezentacji rzeczywistych opartych na warunkach typu Widdera (z perspektywy równań ewolucyjnych, prowadzących do twierdzeń o generowaniu półgrup operatorowych, warunki typu Hille-Yosidy), jak również reprezentacji zespolonych prowadzących do twierdzeń o generowaniu półgrup holomorficznych - mających szerokie zastosowanie do badania równań różniczkowych cząstkowych wywodzących się z fizyki matematycznej. Ponadto, przedstawione zostaną główne wyniki teorii stabilności półgrup operatorowych i ich zastosowanie do konkretnych równań różniczkowych cząstkowych wywodzących się z fizyki matematycznej (np. równania falowego z tłumieniem).

Wymagania wstępne

Ukończone kursy z Analizy funkcjonalnej, Teorii miary i całki oraz Równań różniczkowych cząstkowych.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy – Student/ka:			
W1	Zna podstawowe narzędzia i wyniki teorii całki Bochnera	MAT_K2_W01, MAT_K2_W04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W2	Zna własności całki Laplace’a funkcji lokalnie całkowalnych w sensie Bochnera, twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, formuły odwrotne Posta-Widdera, operatorowe własności całki Laplace’a.	MAT_K2_W01, MAT_K2_W04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W3	Rozumie znaczenie geometrycznych własności przestrzeni Banacha (typ Fouriera, ograniczoność transformaty Hilberta, twierdzenie Kwapienia) przy tworzeniu wektorowych odpowiedników klasycznych twierdzeń analizy matematycznej	MAT_K2_W01, MAT_K2_W02, MAT_K2_W04	Egzamin pisemny

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
W4	Zna powiązanie teorii transformaty Laplace'a z problematyką teorii równań różniczkowych cząstkowych	MAT_K2_W01, MAT_K2_W02, MAT_K2_W04	Egzamin pisemny
W5	Zna podstawy teorii półgrup operatorowych oraz jej związek z zagadnieniami Cauchy'ego pierwszego i drugiego rzędu (twierdzenia o generowaniu, charakteryzacja rozwiązywalności takich problemów).	MAT_K2_W02, MAT_K2_W03, MAT_K2_W04	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W6	Zna i rozumie główne wyniki teorii stabilności półgrup operatorowych oraz ich znaczenie w badaniu energii stowarzyszonych układów hiperbolicznych.	MAT_K2_W01, MAT_K2_W03, MAT_K2_W04	Egzamin pisemny
Umiejętności – Student/ka:			
U1	Potrafi posługiwać się podstawowymi narzędziami i wynikami teorii całki Bochnera oraz teorii transformaty Laplace'a.	MAT_K2_U03, MAT_K2_U05, MAT_K2_U07	Kolokwium pisemne
U2	Potrafi posługiwać się podstawowymi narzędziami teorii operatorów, analizy funkcjonalnej, teorii przestrzeni Hilberta i teorii transformaty Laplace'a w badaniu problematyki zagadnień Cauchy'ego pierwszego rzędu.	MAT_K2_U02, MAT_K2_U03, MAT_K2_U06, MAT_K2_U07, MAT_K2_U09	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U3	Potrafi przeformułować wybrane zagadnienia fizyki matematycznej do postaci abstrakcyjnych problemów Cauchy'ego, a następnie stosować poznane techniki i narzędzia do badania regularności oraz asymptotycznego zachowania ich rozwiązań.	MAT_K2_U03, MAT_K2_U05, MAT_K2_U06, MAT_K2_U07, MAT_K2_U09	Egzamin pisemny
Kompetencji społecznych – Student/ka:			
K1	Stosuje metodologię badań abstrakcyjnych problemów Cauchy'ego opartą na technikach teorii półgrup operatorowych i transformaty Laplace'a do analizy wybranych zagadnień z równań różniczkowych cząstkowych.	MAT_K2_K01, MAT_K2_K02, MAT_K2_K03, MAT_K2_K06	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Podstawy teorii całki Bochnera-Lebesgue'a funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach w przestrzeniach Banacha (podstawowe własności całki Bochnera, odpowiedniki klasycznych twierdzeń teorii całki Lebasgue'a, twierdzenie Pettisa).	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia
2.	Własności całki Laplace'a funkcji lokalnie całkowalnych w sensie Bochnera, twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, formuły odwrotne typu Posta-Widdera, własności operatorowe całki Laplace'a.	W2, W3, U1, U2	Wykład, Ćwiczenia

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
3.	Transformata Fouriera funkcji wektorowych, twierdzenie Plancherela oraz twierdzenie Paleya-Wienera dla funkcji o wartościach w przestrzeniach Hilberta i ich powiązanie z transformatą Laplace’a, znaczenie własności geometrycznych przestrzeni Banacha (typ Fouriera, ograniczoność transformaty Hilberta, twierdzenie Kwapienia).	W3	Wykład
4.	Warunki wystarczające dla funkcji całkowalnych w sensie Bochnera na przedstawienie w postaci całki Laplace'a, warunki rzeczywiste typu Widdera, warunki zespolone dla funkcji holomorficznych (twierdzenia tauberowskie), twierdzenia charakteryzujące transformowalność w sensie Laplace’a.	W2, W3, U1	Wykład, Ćwiczenia
5.	Wprowadzenie do teorii półgrup operatorowych i jej powiązań z abstrakcyjnymi problemi Cauchy’ego pierwszego i drugiego rzędu; charakteryzacja rozwiązywalności w terminach transformaty Laplace’a, twierdzenie Hillego-Yoisidy, generatory półgrup holomorficznych, twierdzenie da Prata-Sinestrari dla niejednorodnych problemów Cauchy’ego.	W3, W4, W5, U2, K1	Wykład, Ćwiczenia
6.	Teoria stabilności półgrup operatorowych (zarys teorii, omówienie twierdzenia Boricheva-Tomilova i jego późniejszych wariantów, przedstawienie powiązania z elementy teorii tauberowskiej dla transformaty Laplace’a.	W4, W5, W6, U2, U3, K1	Wykład, Ćwiczenia
7.	Ilustracja materiału teoretycznego przykładami wywodzącymi się z równań różniczkowych cząstkowych (równanie falowe z tłumieniem, równanie ciepła, półgrupa gaussowska, półgrupa Poissona).	W3, W4, W5, W6, U1, U2, U3, K1	Wykład, Ćwiczenia

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład konwersatoryjny, Wykład problemowy, Dyskusja, Praca z tekstem
Ćwiczenia	Dyskusja, Metoda badawcza (dociekania naukowego), Metoda aktywizująca - "burza mózgów", Praca w grupach, Rozwiązywanie zadań obliczeniowych, Rozwiązywanie zadań praktycznych

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Egzamin pisemny. Skala ocen: • bardzo dobry (bdb; 5,0): od 90% punktów • dobry plus (+db; 4,5): od 80% punktów • dobry (db; 4,0): od 70% punktów • dostateczny plus (+dst; 3,5): od 60% punktów • dostateczny (dst; 3,0): od 50% punktów • niedostateczny (ndst; 2,0): poniżej 50% punktów

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Ćwiczenia	Kolokwium pisemne. Skala ocen: • bardzo dobry (bdb; 5,0): od 90% punktów • dobry plus (+db; 4,5): od 80% punktów • dobry (db; 4,0): od 70% punktów • dostateczny plus (+dst; 3,5): od 60% punktów • dostateczny (dst; 3,0): od 50% punktów • niedostateczny (ndst; 2,0): poniżej 50% punktów

Literatura

Obowiązkowa

1. W. Arendt, C.K.J. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems, Monographs in Mathematics, 96, Birkhäuser/Springer 2011.
2. E. Hille, R.S. Phillips. Functional Analysis and Semi-groups. Amer. Math. Soc., Providence, 1957.
3. A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, 44, Springer, 1983.
4. G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Vol. I,II, III, Birkhäuser, Basel, 1950, 1955, 1956.

Dodatkowa

1. K.J. Engel, R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations, Graduate Texts in Mathematics, 194, Springer, 2000.

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	30
Ćwiczenia	30
Przygotowanie do zajęć	40
Przygotowanie do egzaminu	35
Czytanie wskazanej literatury	15
Łączny nakład pracy studenta	**Liczba godzin** 150
Liczba punktów ECTS	**ECTS** 6

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
MAT_K2_K01	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do dalszego ustawicznego kształcenia
MAT_K2_K02	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do formułowania adekwatnych pytań służących zrozumieniu danego tematu i identyfikacji brakujących elementów rozumowania
MAT_K2_K03	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do samodzielnego wyszukiwania informacji w literaturze i bazach danych, także w językach obcych
MAT_K2_K06	Absolwent/ka jest gotów/gotowa do wyrażania zdania i jego logicznego uzasadnienia w zagadnieniach, które używają matematyki jako języka opisu
MAT_K2_U02	Absolwent/ka potrafi przeprowadzać rozumowania matematyczne, dowodzenie twierdzeń, jak i weryfikację hipotez drogą doboru odpowiednich przykładów
MAT_K2_U03	Absolwent/ka potrafi zrozumiale przedstawić osiągnięcia matematyki i omówić jej różnorodne zastosowania
MAT_K2_U05	Absolwent/ka potrafi analizować nowe zagadnienia, korzystać z literatury matematycznej, baz danych i innych źródeł oraz dokonać krytycznej ich oceny
MAT_K2_U06	Absolwent/ka potrafi odnosić pojęcia matematyczne do niematematycznych kontekstów, w analizowanych problemach potrafi dostrzec i wykorzystać struktury formalne opisywane w wybranych działach matematyki
MAT_K2_U07	Absolwent/ka potrafi posługiwać się narzędziami i aparatem analizy matematycznej oraz zna jej znaczenie i zastosowanie w poznanych działach matematyki
MAT_K2_U09	Absolwent/ka potrafi posługiwać się zaawansowanymi metodami i narzędziami przynajmniej z jednej dziedziny matematyki
MAT_K2_W01	Absolwent/ka zna i rozumie klasyczne pojęcia z zakresu matematyki i jej zastosowań oraz najważniejsze metody i twierdzenia z głównych jej działów
MAT_K2_W02	Absolwent/ka zna i rozumie rolę, znaczenie i zasady poprawnego prowadzenia rozumowań matematycznych oraz zna różne techniki dowodzenia
MAT_K2_W03	Absolwent/ka zna i rozumie podstawy konstruowania modeli matematycznych przydatnych w zastosowaniach matematyki w różnych dziedzinach wiedzy
MAT_K2_W04	Absolwent/ka zna i rozumie specjalistyczne zagadnienia z wybranej dziedziny matematyki