

Algebra liniowa

Sylabus zajęć

Informacje podstawowe

Kierunek studiów Nauczanie matematyki i informatyki Specjalność - Jednostka organizacyjna Wydział Matematyki i Informatyki Poziom studiów studia pierwszego stopnia Forma studiów studia stacjonarne Profil studiów profil ogólnoakademicki		Cykl dydaktyczny 2024/25 Kod zajęć 06NMIS.18K.00217.24 Języki wykładowe polski Obligatoryjność Fakultatywny Blok zajęciowy Przedmioty kierunkowe
Koordynator zajęć	Dominika Wojtera-Tyrakowska	
Prowadzący zajęcia	Dominika Wojtera-Tyrakowska	
Okres Semestr 4	Forma zajęć / liczba godzin / forma zaliczenia - Wykład: 30, Egzamin; w tym zajęcia zdalne: - Wykład synchroniczny: 30 - Ćwiczenia: 30, Zaliczenie z oceną	Liczba punktów ECTS 6

Cele kształcenia dla zajęć

Kod	Cel
C1	Celem przedmiotu jest zapoznanie studentek i studentów z podstawowymi pojęciami i operacjami dotyczącymi macierzy oraz przestrzeni i przekształceń liniowych.

Wymagania wstępne

Znajomość wybranych zagadnień ze wstępu do matematyki oraz ze wstępu do algebry i teorii liczb.

Efekty uczenia się dla zajęć

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
Wiedzy - Student/ka:			
W1	zna pojęcia wektora i macierzy o elementach z różnych ciał oraz podstawowe działania na nich	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W2	zna pojęcia macierzy układu liniowych równań algebraicznych, zbioru rozwiązań oraz rozumie metody rozwiązywania układów równań	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W3	zna i rozumie twierdzenia algebry liniowej (m.in. tw. Kroneckera-Capellego, Laplace'a, Cauchy'ego)	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W4	zna pojęcia przestrzeni i podprzestrzeni liniowej, liniowej niezależności wektorów i bazy wektorów; dostrzega struktury liniowe w innych działach matematyki	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W5	zna pojęcia długości (normy) wektora w przestrzeni R^n oraz iloczynu skalarnego wektorów w R^n ; zna definicję przestrzeni euklidesowej	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny
W6	zna pojęcie wyznacznika, sposoby jego obliczania oraz własności wyznacznika	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W7	zna pojęcie macierzy odwrotnej oraz metody obliczania odwrotności macierzy nieosobliwych	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
W8	zna pojęcie przekształcenia liniowego, izomorfizmu przestrzeni liniowych, macierzy przekształcenia liniowego oraz wartości i wektorów własnych przekształcenia liniowego	NMI_K1_W02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
Umiejętności - Student/ka:			
U1	potrafi wykonać działania na wektorach i macierzach oraz opisać wektor/macierz o wybranych własnościach	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U2	rozwiązuje układy liniowych równań algebraicznych opisane macierzą niskiego stopnia	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U3	oblicza wyznacznik i rząd macierzy niskiego stopnia, zna metody obliczania wyznacznika i rzędu macierzy wyższych stopni, wyciąga wnioski o własnościach macierzy na podstawie jej wyznacznika lub rzędu	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U4	potrafi zdefiniować macierz odwrotną, odwracalną, osobliwą, nieosobliwą oraz obliczyć odwrotność macierzy nieosobliwej niskiego stopnia; wskazuje metody obliczania odwrotności macierzy nieosobliwej wyższych stopni; potrafi podać własności macierzy odwracalnych	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U5	umie podać przykłady przestrzeni i podprzestrzeni liniowych; potrafi badać własności liniowych kombinacji wektorów	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne
U6	potrafi rozwiązywać zadania posługując się pojęciem bazy	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Kod	Efekty uczenia się dla zajęć w zakresie	Efekty uczenia się dla kierunku	Metody weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się dla zajęć
U7	potrafi podać przykłady przekształceń liniowych między różnymi przestrzeniami liniowymi; umie określić, czy dane przekształcenie jest przekształceniem liniowym; umie wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego oraz jego wartości i wektory własne	NMI_K1_U02	Egzamin pisemny, Kolokwium pisemne

Treści programowe dla zajęć

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
1.	Punkty i wektory w przestrzeni. Przekształcenie liniowe – intuicyjne wprowadzenie działań na wektorach i macierzach. Macierz kwadratowa, prostokątna, macierz transponowana, hermitowsko-sprężona, jednostkowa (identycznościowa), zerowa, trójkątna górna, trójkątna dolna, pasmowa. Rachunek macierzowy.	W1, U1	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
2.	Układy liniowych równań liniowych – zapis macierzowy. Rozwiązywanie układów liniowych równań algebraicznych za pomocą operacji elementarnych wykonywanych na macierzy rozszerzonej układu. Postać zredukowana i całkowicie zredukowana macierzy, rząd macierzy. Tw. Kroneckera-Capellego. Macierz odwrotna, odwracalna, osobliwa, nieosobliwa. Odwrotność macierzy uzyskana za pomocą operacji elementarnych.	W2, W3, W7, U2, U4	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
3.	Rozwiązywanie układów liniowych równań algebraicznych o elementach z ciała liczb rzeczywistych metodą eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego. Zapis kroków metody eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego za pomocą macierzy przekształceń elementarnych.	W2, U2	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
4.	Wyznacznik macierzy kwadratowej i jego własności. Twierdzenie Laplace'a. Schemat Sarrusa. Definicja wyznacznika w oparciu o permutacje. Twierdzenie Cauchy'ego. Minory (główne, wiodące). Wykorzystanie wyznaczników do obliczania rzędu macierzy (metoda minorów obejmujących) i rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych (wzory Cramera). Porównanie metody rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych wykorzystującej wzory Cramera z metodą eliminacji Gaussa w kontekście obliczeń na dużych układach równań.	W2, W3, W6, U2, U3	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
5.	Przestrzeń i podprzestrzeń liniowa. Przykłady podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Układ wektorów, kombinacja liniowa układu wektorów. Wymiar podprzestrzeni, a rząd macierzy. Liniowa zależność i niezależność układu wektorów wraz z przykładami i wymaganymi twierdzeniami.	W3, W4, U5	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
6.	Wprowadzenie pojęcia iloczynu skalarnego wektorów z $\mathbb{R}^n$, normy wektora, nierówności trójkąta oraz przestrzeni euklidesowej.	W5	Wykład, Wykład synchroniczny

Lp.	Treści programowe dla zajęć	Efekty uczenia się dla zajęć	Formy zajęć
7.	Baza i wymiar przestrzeni liniowej; przykłady baz przestrzeni liniowych skończonego wymiaru; sprawdzanie, czy dany układ wektorów tworzy bazę danej przestrzeni liniowej. Baza a wyznacznik i rząd macierzy. Współrzędne wektora względem bazy. Znajdowanie bazy wśród układu wektorów rozpinających daną przestrzeń; znajdowanie bazy danej przestrzeni liniowej; obliczanie wymiaru danej przestrzeni liniowej.	W4, U6	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
8.	Przekształcenie liniowe – formalna definicja. Przykłady przekształceń liniowych. Macierz przekształcenia liniowego w danych bazach przestrzeni skończonego wymiarowych. Sprawdzanie, czy funkcja jest przekształceniem liniowym. Sprawdzanie, czy istnieje przekształcenie liniowe zadane przez konkretne przyporządkowanie wektorów.	W8, U7	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
9.	Automorfizmy przestrzeni liniowej i macierze nieosobliwe. Macierz przejścia od bazy do bazy.	W4, U6	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny
10.	Wektory i wartości własne macierzy i przekształceń liniowych.	W8, U7	Wykład, Ćwiczenia, Wykład synchroniczny

Informacje dodatkowe

Forma zajęć	Metody i formy prowadzenia zajęć
Wykład	Wykład z prezentacją multimedialną wybranych zagadnień
Ćwiczenia	Metoda ćwiczeniowa, Rozwiązywanie zadań obliczeniowych

Forma zajęć	Warunki zaliczenia zajęć
Wykład	Warunkiem przystąpienia do egzaminu jest otrzymanie przed terminem egzaminu pozytywnej oceny z ćwiczeń. Ocena końcowa zostanie wystawiona na podstawie egzaminu pisemnego. Skala ocen: bardzo dobry (bdb; 5,0) – od 90% punktów dobry plus (db plus; 4,5) – od 80% punktów dobry (db; 4,0) – od 70% punktów dostateczny plus (dst plus; 3,5) – od 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) – od 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) – poniżej 50% punktów W przypadku uzyskania poniżej 50% punktów jest możliwość pisania egzaminu poprawkowego. Ocena zostaje wówczas wystawiona na analogicznych zasadach jak w przypadku egzaminu w pierwszym terminie.
Ćwiczenia	Ocena końcowa (w usos „termin 1”) zostanie wystawiona na podstawie dwóch kolokwii pisemnych (każde po 50%). Skala ocen: bardzo dobry (bdb; 5,0) – od 90% punktów dobry plus (db plus; 4,5) – od 80% punktów dobry (db; 4,0) – od 70% punktów dostateczny plus (dst plus; 3,5) – od 60% punktów dostateczny (dst; 3,0) – od 50% punktów niedostateczny (ndst; 2,0) – poniżej 50% punktów W przypadku uzyskania poniżej 50% punktów z obu kolokwii łącznie każdej osobie przysługuje możliwość poprawy w postaci jednego kolokwium zaliczeniowego (zakres materiału zostanie wskazany przez osobę prowadzącą zajęcia) - w usos „termin 2”.

Literatura

Obowiązkowa

1. Banaszak G., Gajda W., Elementy algebry liniowej cz.1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2002
2. Kajetanowicz P., Wierzejewski J., Algebra z geometrią analityczną, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008
3. Rutkowski J., Algebra liniowa w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN 2008

Dodatkowa

1. Jurliewicz T., Skoczylas Z., Algebra liniowa. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017.
2. Sołtysiak A., Algebra liniowa, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003
3. Zakrzewski M., Markowe wykłady z matematyki, algebra z geometrią, GiS, 2015

Nakład pracy studenta i punkty ECTS

Rodzaje zajęć studenta	Średnia liczba godzin* przeznaczonych na zrealizowane rodzaje zajęć
Wykład	30
Ćwiczenia	30
Przygotowanie do zajęć	35
Przygotowanie do zaliczenia	25
Przygotowanie do egzaminu	40
Czytanie wskazanej literatury	20
Łączny nakład pracy studenta	Liczba godzin 180
Liczba punktów ECTS	ECTS 6

* godzina (lekcyjna) oznacza 45 minut

Efekty uczenia się dla kierunku

Kod	Treść
NMI_K1_U02	Absolwent/ka potrafi posługiwać się metodami i aparatem pojęciowym algebry i teorii liczb oraz algebry liniowej i geometrii,
NMI_K1_W02	Absolwent/ka zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia algebry i teorii liczb oraz algebry liniowej i geometrii,